國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(二) 第十二次作業參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 已知函數 $f(t)=(t^2-4)u(t-4)$ ，$g(t)=tu(t)$ ，試問函數 $e^{-2t}f(t)$ 之拉氏轉換。
2. 試求拉氏轉換 $\mathcal{L}[t^2\sin at]$ 以及 $\mathcal{L}[te^{-2t}\sin at]$
3. 試求函數 $\int_0^t \frac{1-\cosh a\tau}{\tau}d\tau$、$\int_0^t \frac{\cos a\tau-\cosh a\tau}{\tau}d\tau$ 與 $\int_2^t \tau^2 e^{3\tau}d\tau$ 之拉氏轉換。
4. 試求函數 $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\le t<2\pi \\ \sin t+\cos t, & t\ge 2\pi\end{cases}$ 與 $g(t)=\frac{\sin^2 t}{t}$ 之拉氏轉換。
5. 已知拉氏轉換 $\mathcal{L}[\sin\sqrt{t}]=\frac{\sqrt{\pi}}{2}s^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{s}{4}}$，試問: $\mathcal{L}[\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}]$ 之轉換
6. 試求函數 $\cos(\omega t+\theta)$ 以及函數 $\mathcal{L}[\frac{1}{t}e^{at}\sinh t]$ 之拉氏轉換。

參考解答:

1. $f(t)=(t^2-4)u(t-4)=[(t-4)^2+8(t-4)+12]u(t-4)$

$$\mathcal{L}[t^2+8t+12]=\frac{2}{s^3}+\frac{8}{s^2}+\frac{12}{s}$$

$$\mathcal{L}[f(t)]=(\frac{2}{s^3}+\frac{8}{s^2}+\frac{12}{s})e^{-4s}$$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}f(t)]=[\frac{2}{(s+2)^3}+\frac{8}{(s+2)^2}+\frac{12}{s+2}]e^{-4s}$$

2. $\mathcal{L}[\sin at]=\frac{a}{s^2+a^2}$

$$\mathcal{L}[t^2\sin at]=-\frac{d}{ds}[-\frac{d}{ds}(\frac{a}{s^2+a^2})]=-\frac{d}{ds}[\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}]=2a\frac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$$

$$\mathcal{L}[t\sin at]=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\mathcal{L}[te^{-2t}\sin at]=\frac{2a(s+2)}{[(s+2)^2+a^2]^2}$$

3. $\mathcal{L}[1-\cosh at]=\mathcal{L}[1-\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}]=\frac{1}{s}-\frac{1}{2}(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a})=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2-a^2}$

$$\mathcal{L}[\frac{1-\cosh at}{t}]=\int_s^\infty(\frac{1}{\tau}-\frac{\tau}{\tau^2-a^2})d\tau=\ln\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2-a^2}}\Big|_s^\infty=\ln\frac{\sqrt{s^2-a^2}}{s}$$

$$\mathcal{L}[\int_0^t\frac{1-\cosh a\tau}{\tau}d\tau]=\frac{1}{s}\ln\frac{\sqrt{s^2-a^2}}{s}$$

$$\mathcal{L}[\cos at-\cosh at]=\frac{s}{s^2+a^2}-\frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}[\frac{1-\cosh at}{t}]=\int_s^\infty(\frac{\tau}{\tau^2+a^2}-\frac{\tau}{\tau^2-a^2})d\tau=\frac{1}{2}\ln\frac{\tau^2+a^2}{\tau^2-a^2}\Big|_s^\infty=\frac{1}{2}\ln\frac{s^2-a^2}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}[\int_0^t\frac{\cos a\tau-\cosh a\tau}{\tau}d\tau]=\frac{1}{2s}\ln\frac{s^2-a^2}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}[t^2]=\frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}[t^2e^{3t}]=\frac{2}{(s-3)^3}$$

$$\mathcal{L}[\int_0^t\tau^2e^{3\tau}d\tau]=\frac{1}{s}\frac{2}{(s-3)^3}$$

$$\mathcal{L}[\int_2^t\tau^2e^{3\tau}d\tau]=\mathcal{L}[\int_0^t\tau^2e^{3\tau}d\tau-\int_0^2\tau^2e^{3\tau}d\tau]=\mathcal{L}[\int_0^t\tau^2e^{3\tau}d\tau-(\frac{26}{27}e^6-\frac{2}{27})]$$

$$=\frac{1}{s}\frac{2}{(s-3)^3}-\frac{1}{s}(\frac{26}{27}e^6-\frac{2}{27})$$

4. $f(t)=\sin t\cdot[u(t)-u(t-2\pi)]+(\sin t+\cos t)\cdot u(t-2\pi)$

$$=\sin t\cdot u(t)+\cos t\cdot u(t-2\pi)$$

$$=\sin t\cdot u(t)+\cos(t-2\pi)\cdot u(t-2\pi)$$

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}e^{-2\pi S}$$

$$g(t)=\frac{\sin^2 t}{t}=\frac{1}{t}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}$$

$$\mathcal{L}[\frac{1-\cos 2t}{2}]=\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4})$$

$$G(s)=\mathcal{L}[g(t)]=\frac{1}{2}\int_s^\infty(\frac{1}{\tau}-\frac{\tau}{\tau^2+4})d\tau=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}$$

5. 取 $f(t)=\sin\sqrt{t}$ $\Rightarrow \frac{d}{dt}f(t)=\frac{1}{2}\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ 且 $f(0)=0$

$$\therefore\ \mathcal{L}[\frac{1}{\sqrt{t}}\cos\sqrt{t}]=2\mathcal{L}[\frac{d}{dt}f(t)]=2[sF(s)-f(0)]=\sqrt{\pi}\,s^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{s}{4}}$$

6. $\mathcal{L}[\cos(\omega t+\theta)]=\mathcal{L}[\cos\omega t\cdot\cos\theta-\sin\omega t\cdot\sin\theta]$

$$=\mathcal{L}[\cos\theta\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}-\sin\theta\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}]$$

$$\mathcal{L}[\sinh t] = \frac{1}{s^2 - 1}$$

$$\mathcal{L}[\frac{1}{t}\sinh t] = \int_s^\infty \frac{1}{\tau^2 - 1} d\tau = \frac{1}{2}\int_s^\infty (\frac{1}{\tau - 1} - \frac{1}{\tau + 1}) d\tau = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}$$

$$\mathcal{L}[\frac{1}{t}e^{at}\sinh t] = \frac{1}{2}\ln\frac{s-a+1}{s-a-1}$$