國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(二) 第十一次作業參考解答

系級：________　　學號：________　　姓名：________

1. 已知 $f(t)=e^t u(t)$ ， $g(t)=tu(t)$ ，試計算 $f(t)*g(t)$ 。
2. (1) 試畫出函數 $f(t)=u(t+2)-u(t-2)$ 之圖形，其中 $u(t-a)$ 為 unit step function，定義為 $u(t-a)=\begin{cases}1, & t>a\\ 0, & t<a\end{cases}$ ，並求 $f(t)$ 之傅立葉轉換。
   (2) 函數 $g(t)=e^{-t}u(t)$ ，試求 $g(t)$ 之傅立葉轉換。
   (3) 利用(1)與(2)之結果，試求 $\dfrac{2\sin 2\omega}{\omega(i\omega+1)}$ 之傅立葉反轉換。
3. 試求函數 $F(\omega)=\dfrac{5}{2-\omega^2+3i\omega}$ 之傅立葉反轉換 $f(x)$ 。
4. 試以傅立葉轉換求解 $y''+y'+y=\delta(x)$ ，其中 $x\in(-\infty,\infty)$ 。

參考解答:

1. $f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}u(\tau)(t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau$

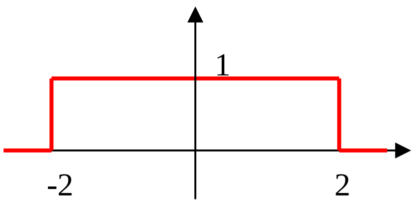
$$=\int_0^t e^{\tau}(t-\tau)\,d\tau$$

$$=(te^{\tau}-\tau e^{\tau}+e^{\tau})\Big|_0^t$$

$$=(te^t-te^t+e^t)-(t-0+1)$$

$$=e^t-t-1$$

2. (1)



$$F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-2}^{2} e^{-i\omega t}dt=\frac{2\sin 2\omega}{\omega}$$

(2) $G(\omega)=\mathcal{F}\{g(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot e^{-i\omega t}dt=\dfrac{1}{i\omega+1}$

(3) $\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{2\sin 2\omega}{\omega(i\omega+1)}]=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{2\sin 2\omega}{\omega}\cdot\dfrac{1}{(i\omega+1)}]$

又 $f(t)=\mathcal{F}^{-1}[\frac{2\sin 2\omega}{\omega}]=u(t+2)-u(t-2)$

$g(t)=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(i\omega+1)}]=e^{-t}u(t)$

$\therefore\ \mathcal{F}^{-1}[\frac{2\sin 2\omega}{\omega(i\omega+1)}]=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)\cdot G(\omega)]=f(t)*g(t)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau+2)-u(\tau-2)]\cdot[e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)]\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau+2)\cdot e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau-\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-2)\cdot e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$$

$$=u(t+2)\int_{-2}^{t} e^{-(t-\tau)}\,d\tau-u(t-2)\int_{2}^{t} e^{-(t-\tau)}\,d\tau$$

$$=u(t+2)\cdot e^{-t}\int_{-2}^{t} e^{\tau}\,d\tau+u(t-2)\cdot e^{-t}\int_{t}^{2} e^{\tau}\,d\tau$$

$$=u(t+2)\cdot e^{-t}\cdot(e^{t}-e^{-2})+u(t-2)\cdot e^{-t}\cdot(e^{2}-e^{t})$$
$$=u(t+2)\cdot(1-e^{-(2+t)})+u(t-2)\cdot(e^{2-t}-1)$$

3. $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{5}{2-\omega^2+3i\omega}e^{i\omega x}d\omega$$

$$=-\frac{5}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{(\omega-i)(\omega-2i)}d\omega$$

$\therefore$ pole 在 $\omega=i$ 與 $\omega=2i$ 且留數為

$$R(i)=\left.\frac{e^{i\omega x}}{2\omega-3i}\right|_{\omega=i}=ie^{-x}$$

$$R(2i)=\left.\frac{e^{i\omega x}}{2\omega-3i}\right|_{\omega=2i}=-ie^{-2x}$$

應用 Jordan Lemma 可知若 x 為負實數即 $x<0$（下半平面），因為不存在不解析點，則 $f(x)=0$，若 x 為正實數即 $x>0$，則有

$$f(x)=-\frac{5}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{(\omega-i)(\omega-2i)}d\omega=-\frac{5}{2\pi}\cdot 2\pi i\cdot(ie^{-x}-ie^{-2x})$$
$$=5(e^{-x}-e^{-2x})$$

故可得 $f(x)=5(e^{-x}-e^{-2x})\cdot u(x)$

4. $\mathcal{F}[y(x)] = Y(\omega)$

$\mathcal{F}[y'' + y' + y] = \mathcal{F}[\delta(x)]$

$\Rightarrow -\omega^2 Y(\omega) + i\omega Y(\omega) + Y(\omega) = 1$

$\Rightarrow -\omega^2 Y(\omega) + i\omega Y(\omega) + Y(\omega) = 1$

$$\Rightarrow Y(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 - i\omega - 1}$$

$$y(x) = \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - i\omega - 1} e^{i\omega x} d\omega$$

由 $\omega^2 - i\omega - 1 = 0 \quad \Rightarrow \omega = \dfrac{i \pm \sqrt{3}}{2}$ 可知有 2 簡單極點，且其留數為

$$R\left(\frac{i+\sqrt{3}}{2}\right) = \left.\frac{e^{i\omega x}}{2\omega - i}\right|_{\omega = i} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x}$$

$$R\left(\frac{i-\sqrt{3}}{2}\right) = \left.\frac{e^{i\omega x}}{2\omega - i}\right|_{\omega = 2i} = -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}x}$$

應用 Jordan Lemma 可知若 x 為負實數即 $x < 0$（下半平面），因為不存在不解析點，則 $y(x) = 0$，若 x 為正實數即 $x > 0$，則有

$$y(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\omega^2 - i\omega - 1} d\omega = -\frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}x}\right)$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot 2i \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

故可得 $y(x) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot u(x)$