國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(二) 第六次作業參考解答

系級：____________ 學號：__________ 姓名：_________

1. 試求向量場 $\vec{F} = x^2\,\vec{i} + xy\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$ 在以 $(1,0,0)$ 、$(0,2,0)$ 與 $(0,0,3)$ 為頂點之三角平面上之面積分，即 $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dA = ?$

2. 試求場 $\vec{F} = y^3\,\vec{i} + x^3\,\vec{j} + z^3\,\vec{k}$ 通過曲面 $S: x^2 + 4y^2 = 4,\ z \in [0, h]$ 在第一象限部份之通率。

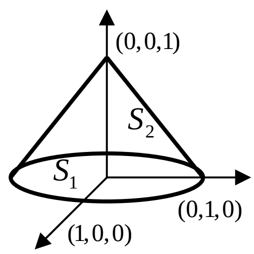
3. 試求場 $\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (y-z)\,\vec{j} + (z-x)\vec{k}$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 之通率。

4. 就 $\vec{F} = x\vec{i} + y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$ 在及以 $(0,0,0)$ 、$(a,0,0)$ 、$(0,b,0)$ 與 $(0,0,c)$ 為頂點之三角錐，試驗證散度定理。 (分別以體積分與面積計算，並檢查是否相等)

5. 試求 $\iint_S (\vec{F}\cdot\vec{n})\,dA$ 之值，其中 $\vec{F} = z^2\,\vec{k}$ ，S 為圓椎體之封閉曲面。

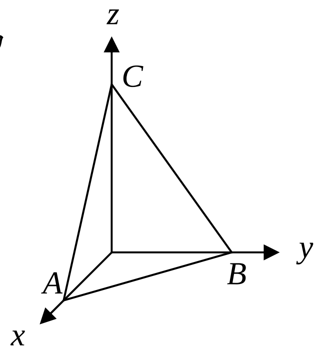
   (a) 以散度定理計算

   (b) 直接以面積分計算



參考解答:

1. 在以 $A(1,0,0)$、$B(0,2,0)$ 與 $C(0,0,3)$ 三角平面之法向量為



$\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$

$$\vec{n}=\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}}{7}$$

平面方程式為 $6x+3y+2z=6$

$$\iint_S(\vec{F}\cdot\vec{n})\,dA=\iint_S(x^2\,\vec{i}+xy\,\vec{j}+xz\,\vec{k})\cdot\frac{6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}}{7}dA=\iint_S\frac{6x^2+3xy+2xz}{7}dA$$

$\because \Delta ABC$ 面積分比較難計算

$\therefore$ 投影至 xy 平面計算

故 $dA=\dfrac{7}{2}dxdy$

$$\iint_S(\vec{F}\cdot\vec{n})\,dA=\iint_S\frac{6x^2+3xy+2xz}{7}dA$$

$$=\int_0^2\int_0^{1-\frac{y}{2}}\frac{6x^2+3xy+x(6-6x-3y)}{7}\frac{7}{2}dxdy$$

$$=1$$

2. $\because$ 曲面 $S: x^2+4y^2=4$, $z\in[0,h]$

$\therefore$ 可知此為橢圓柱狀

令 $\phi=x^2+4y^2-4$

法向量 $\vec{n}=\dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}=\dfrac{2x\,\vec{i}+8y\,\vec{j}}{\sqrt{(2x)^2+(8y)^2}}=\dfrac{x\,\vec{i}+4y\,\vec{j}}{\sqrt{x^2+16y^2}}$

$$\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}=2\sqrt{1-y^2}\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

$$\vec{r}_y=\frac{-2y}{\sqrt{1-y^2}}\vec{i}+\vec{j},\quad \vec{r}_z=\vec{k}$$

$$dA=\left|\vec{r}_y\times\vec{r}_z\right|dy\,dz=\sqrt{\frac{3y^2+1}{1-y^2}}\,dy\,dz=\sqrt{\frac{12y^2+4}{x^2}}\,dy\,dz=\frac{\sqrt{x^2+16y^2}}{x}\,dy\,dz$$

$$\iint_S(\vec{F}\cdot\vec{n})\,dA=\iint_S(y^3\,\vec{i}+x^3\,\vec{j}+z^3\,\vec{k})\cdot\frac{x\,\vec{i}+4y\,\vec{j}}{x}dy\,dz$$

$$=\int_0^h\int_0^1[y^3+4y(4-4y^2)]dy\,dz$$

$$=\frac{17}{4}h$$

3. 由散度定理 $\displaystyle\oiint_S(F\cdot\vec{n})dA=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})dV=\iiint_V 3dV=3\times\frac{4\pi}{3}=4\pi$

4. 散度定理: $\displaystyle\oiint_S(F\cdot\vec{n})dA=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})dV$

$\nabla\cdot\vec{F}=4$

$\displaystyle\therefore\ \iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})dV=4\times V=4\times\frac{abc}{6}=\frac{2abc}{3}$

$S_1: x\text{-}y$ 面，$S_2: x\text{-}z$ 面，$S_3: y\text{-}z$ 面，S_4: 斜面

$$\oiint_S(F\cdot\vec{n})dA=\iint_{S_1}(F\cdot\vec{n})dA+\iint_{S_2}(F\cdot\vec{n})dA+\iint_{S_3}(F\cdot\vec{n})dA+\iint_{S_4}(F\cdot\vec{n})dA$$

$$\because\ \iint_{S_1}(F\cdot\vec{n})dA=\iint_{S_2}(F\cdot\vec{n})dA=\iint_{S_3}(F\cdot\vec{n})dA=0$$

$$\therefore\ \oiint_S(F\cdot\vec{n})dA=\iint_{S_4}(F\cdot\vec{n})dA$$

$$\vec{n}=\frac{(-a,b,0)\times(-a,0,c)}{|(-a,b,0)\times(-a,0,c)|}=\frac{(bc,ac,ab)}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$$

斜面 S_4 方程式 $(x-a,y,z)\cdot\dfrac{(bc,ac,ab)}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}=0$

$$\Rightarrow bc(x-a)+acy+abz)=0$$

$$\Rightarrow\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$$\iint_{S_4}(F\cdot\vec{n})dA=\iint_{S_4}(x\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k})\cdot\frac{bc\vec{i}+ac\vec{j}+ab\vec{k}}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}dA$$

$$=\iint_{S_4}\frac{bcx+acy+2abz}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}dA$$

∵斜面三角形面積分比較難計算

∴投影至 xy 平面計算

故 $\displaystyle dA=\frac{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{ab}dxdy$

$$\iint_{S_4}(F\cdot\vec{n})dA=\int_0^b\int_0^{a-\frac{ay}{b}}\frac{bcx+acy+2abz}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}\cdot\frac{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{ab}dxdy$$

$$= \int_0^b \int_0^{a-\frac{a}{b}y} \left(\frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y + 2z\right) dx dy$$

$$= \int_0^b \int_0^{a-\frac{a}{b}y} \left[\frac{c}{a}x + \frac{c}{b}y + 2\left(c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y\right)\right] dx dy$$

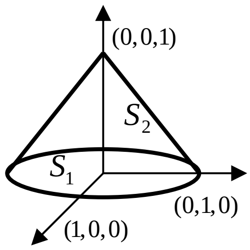
$$= \int_0^b \int_0^{a-\frac{a}{b}y} \left(2c - \frac{c}{a}x - \frac{c}{b}y\right) dx dy$$

$$= \frac{2abc}{3}$$

∵ 由面積分與體積分所得結果相同

∴ 可驗證散度定理

5.



(a) 散度定理: $\oint\!\!\oint_S (F \cdot \vec{n}) dA = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$

$\nabla \cdot \vec{F} = 2z$

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} 2z\, r dr d\theta dz = \frac{\pi}{6}$$

(b) $\oint\!\!\oint_S (F \cdot \vec{n}) dA = \iint_{S_1} (F \cdot \vec{n}) dA + \iint_{S_2} (F \cdot \vec{n}) dA$

∵ $\iint_{S_1} (F \cdot \vec{n}) dA = 0$

∴ $\oint\!\!\oint_S (F \cdot \vec{n}) dA = \iint_{S_2} (F \cdot \vec{n}) dA$

圓椎面方程式: $x^2 + y^2 = (1-z)^2$

令 $x = (1-z)\cos\theta$

$y = (1-z)\sin\theta$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (1-z)\cos\theta\,\vec{i} + (1-z)\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}_\theta = -(1-z)\sin\theta\,\vec{i} + (1-z)\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{r}_z = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z}{|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z|} = \frac{(1-z)\cos\theta\,\vec{i} + (1-z)\sin\theta\,\vec{j} + (1-z)\vec{k}}{\sqrt{(1-z)^2\cos^2\theta + (1-z)^2\sin^2\theta + (1-z)^2}} = \frac{\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

$$dA = |\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z| d\theta dz = \sqrt{2}\,(1-z) d\theta dz$$

$$\iint_{S_2} (F \cdot \vec{n}) dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (z^2\vec{k}) \cdot \frac{\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}} \sqrt{2}\,(1-z) d\theta dz = \frac{\pi}{6}$$