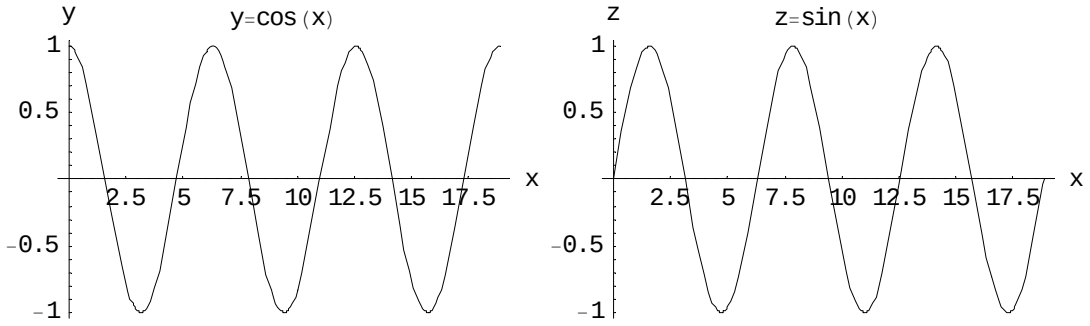
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(二) 2A 班第二次作業參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 試畫出下列各曲線圖形並計算其曲線長度
   (1) 懸鍊線 $\vec{r}(t)=(t,\cosh t)$（$t=0$ 到 $t=2$）
   (2) 內擺線 $\vec{r}(t)=(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$（$t=0$ 到 $t=2\pi$, $a=2$）
   (3) 心臟線 $\vec{r}(t)=(\rho\cos t,\rho\sin t)$ 又 $\rho=a(1-\cos t)$（$t=0$ 到 $t=2\pi$, $a=2$）
   (4) 腎形線 $\vec{r}(t)=(3a\cos t+a\cos 3t, 3a\sin t+a\sin 3t)$（$t=0$ 到 $t=2\pi$, $a=2$）

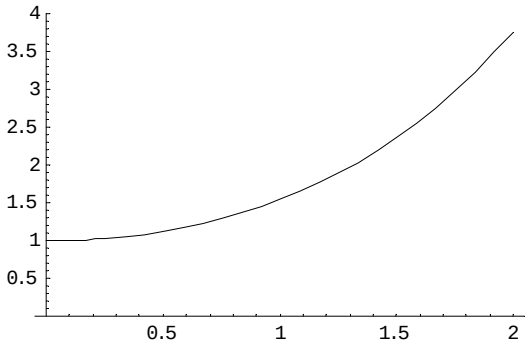
2. 試求下列質點運動軌跡在 $t=\dfrac{5\pi}{6}$ 時之速度、切線加速度與法線加速度
   (1) $\vec{r}(t)=(\sin 2t,\cos t)$
   (2) $\vec{r}(t)=(\sin t,\cos t,\cos 2t)$

3. 已知一曲線之位置向量為 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$。若一 3 維曲線投影於 *x-y* 平面及 *x-z* 如圖所示，試以 $x(t)=t$ 作為參數，求此曲線之單位切向量、單位法向量與曲率 κ。



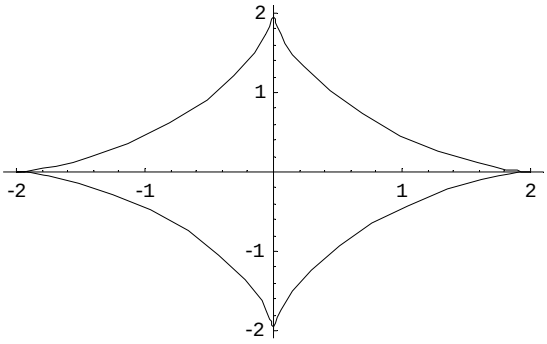
參考解答:

1. (1)



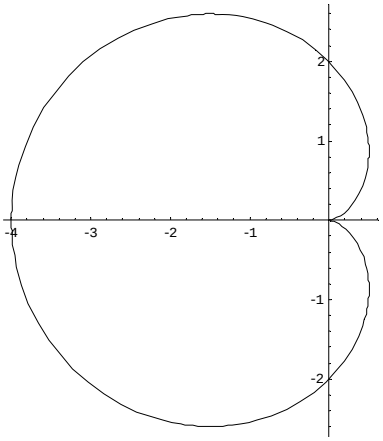
$L=3.627$

(2)



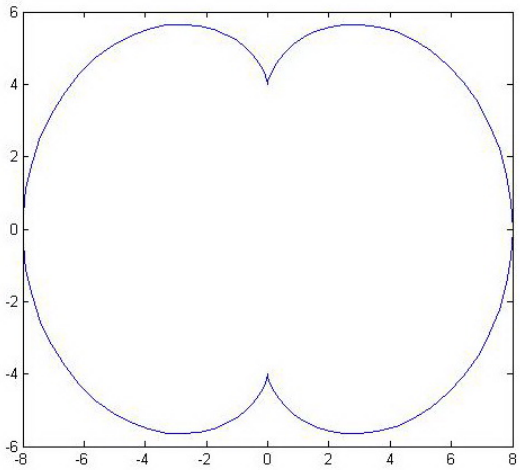
$L = 6a = 12$

(3)



$L = 8a = 16$

(4)



$L = 24a = 48$

2. (1) $\vec{v} = 2\cos 2t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} = \vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

$\vec{a} = -4\sin 2t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} = 2\sqrt{3}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

$$\vec{a}_t = \frac{8\sin 4t - \sin 2t}{-4\cos 4t + \cos 2t - 5}(2\cos 2t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}) = \frac{7\sqrt{3}}{5}\vec{i} - \frac{7\sqrt{3}}{10}\vec{j}$$

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t = \frac{3\sqrt{3}}{5}\vec{i} + \frac{6\sqrt{3}}{5}\vec{j}$$

(2) $\vec{v} = \cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} - 2\sin 2t\,\vec{k} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}$

$$\vec{a} = -\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} - 4\cos 2t\,\vec{k} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{a}_t = \frac{4\sin 4t}{-3 + 2\cos 4t}(\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} - 2\sin 2t\,\vec{k}) = -\frac{3}{4}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{k}$$

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t = \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{j} - \frac{7}{2}\vec{k}$$

3. $x = t$，$y = \cos x = \cos t$，$z = \sin x = \sin t$

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} = t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \sin t\,\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{r}\,'(t) = \vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$

單位切向量 $\vec{t}\,(t) = \dfrac{t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}}{\left|t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \cos t\,\vec{k})$

法向量 $\vec{t}\,'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\,\vec{j} - \sin t\,\vec{k})$

單位法向量 $\vec{n}(t) = -\cos t\,\vec{j} - \sin t\,\vec{k}$

曲率 $\kappa = \left|\dfrac{\vec{t}\,'}{\vec{r}\,'(t)}\right| = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$