國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(二) 2A 班第一次作業參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 試證明:

   (1) 純量四重積 $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$

   (2) 向量四重積 $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D})=[\vec{A}\vec{B}\vec{D}]\vec{C}-[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]\vec{D}$

2. 對於三個已知向量 $\vec{A}=3\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ 、 $\vec{B}=-\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$ 與 $\vec{C}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ，

   試求: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$, $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ 與 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

3. 試求 y 與 z 使點 $A(-1,3,2)$ 、$B(-4,2,-2)$ 與 $C(8,y,z)$ 會落於同一直線上。

4. 若已知向量 $\vec{A}=(2,3,x)$ 、 $\vec{B}=(-1,2,0)$ 與 $\vec{C}=(-1,1,2)$ 共面，試求 $x=?$

5. 對於向量 $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{k}$ 、 $\vec{B}=\hat{j}-\hat{k}$ 與 $\vec{C}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ，試問: $\vec{A}$ 與 $\vec{B}$ 、$\vec{C}$ 所張開平面其法方向之夾角。

6. 試求垂直於平面 $4x+2y+4z=-7$ 的單位向量並求原點 $(0,0,0)$ 到此平面之最短距離。

7. 試求橢圓 $\frac{1}{4}x^2+y^2=1$ 在點 $P(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 的切線。

參考解答:

1. (1)

$$
\begin{aligned}
(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) &= \vec{P}\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) \\
&= \vec{C}\cdot(\vec{D}\times\vec{P}) \\
&= \vec{C}\cdot[\vec{D}\times(\vec{A}\times\vec{B})] \\
&= \vec{C}\cdot[(\vec{D}\cdot\vec{B})\vec{A}-(\vec{D}\cdot\vec{A})\vec{B}] \\
&= (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) &= \vec{P}\times(\vec{C}\times\vec{D}) \\
&= [(\vec{P}\cdot\vec{D})\vec{C}-(\vec{P}\cdot\vec{C})\vec{D}] \\
&= [((\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{D})\vec{C}-((\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C})\vec{D}] \\
&= [\vec{A}\vec{B}\vec{D}]\vec{C}-[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]\vec{D}
\end{aligned}
$$

2. $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}3 & 3 & -2\\ -1 & -4 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=-21$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=-\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=-(\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A}+(\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B}=8\vec{A}+10\vec{B}=14\hat{i}-16\hat{j}+4\hat{k}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}=10\vec{B}+19\vec{C}=28\hat{i}-2\hat{j}+39\hat{k}$$

3. $\overrightarrow{AB}=(-4,2,-2)-(-1,3,2)=(-3,-1,-4)$

$$\overrightarrow{AC}=(8,y,z)-(-1,3,2)=(9,y-3,z-2)$$

$$\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AC}\quad\Rightarrow\frac{9}{-3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{-4}\qquad\Rightarrow y=6,\ \ z=14$$

4. $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}2 & 3 & x\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow x=-14$

5. $\vec{N}=(\vec{B}\times\vec{C})=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$

$$\vec{u}_N=\frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})$$

$$\vec{u}_A=\frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i}-2\hat{k})$$

$$\theta=\cos^{-1}(\vec{u}_N\cdot\vec{u}_A)\quad\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{30}}$$

6. 垂直平面單位法向量 $\vec{u}=\dfrac{(4,2,4)}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}=(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3})$

(0, 0, 0) 到此平面之最短距離為 $\dfrac{7}{6}$

7. $\vec{r}(t)=2\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$

$\vec{r}\,'(t)=-2\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}$

P 點切向量 $\vec{r}\,'(\dfrac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\,\vec{i}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

切線參數方程式為 $\dfrac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\dfrac{y-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=t$

$$\Rightarrow x=-\sqrt{2}t+\sqrt{2}\,,\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}t+\frac{1}{\sqrt{2}}$$