國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(二) 第一次大考參考解答

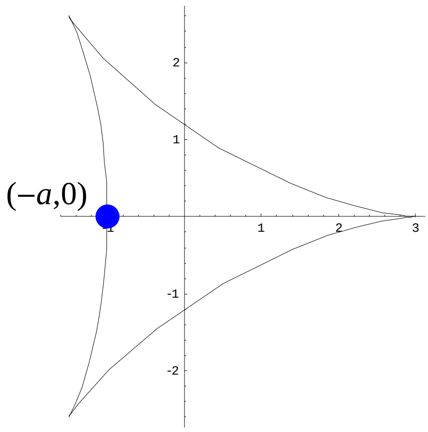
系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 已知一圓球 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ 與一平面 $ax+by+cz=1$ 相交於一點 $P=(3,3,3)$，試問 a 、b 與 c 為何? (10%)

2. 某一質點在空間中移動,其位置向量(單位為 m)為 $\vec{r}(t)=\dfrac{t^3}{3}\vec{i}+(t-2)\vec{j}+\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}\vec{k}$，其中 t(sec)是時間，求此質點
   (1) 在 $t=2$ sec 到 $t=5$ sec 間之移動平均速率。 (6%)
   (2) 在 $t=4$ sec 時之切線加速度向量。 (6%)

3. 有一力 $\vec{F}=y^2\vec{i}+x^2\vec{j}+\cos^2 z\vec{k}$ 施加在某質點上，而此質點沿著軌跡 $\vec{r}=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$ 運動，試問:此力在質點上，由位置 $(1,0,0)$ 到 $(1,0,4\pi)$ 總共作了多少功? (10%)

4. 三尖辦線之位置向量為 $\vec{r}(t)=a(2\cos t+\cos 2t)\vec{i}+a(2\sin t-\sin 2t)\vec{j}$ ，其中 $0\le t\le 2\pi$ ，試問:
   (1) 此三尖辦線之周長。 (6%)
   (2) 試以格林定理: $\oint fdx+gdy=\iint(\dfrac{\partial g}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y})dxdy$，給定 $f=-y$ 與 $g=x$ 來求此三尖辦線之面積。 (6%)
   (3) 試求在點 $(-a,0)$ 之曲率 κ 。 (6%)



5. P 為四項點 $A(2,2)$, $B(4,3)$, $C(3,5)$, $D(5,6)$ 所圍之平行四邊形區域。試由格林定理計算 $\oint_C(-y+6x^2y+3xy^2)\,dx+(3x^2y+2x^3+5x)\,dy$ 其中 C 為包圍區域 P 之邊界。(12%)

6. 試計算$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$，其中$\vec{F}=z\vec{i}+x\vec{j}-3y^2z\vec{k}$，$S$為圓柱體$x^2+y^2=16$，$0\le z\le 5$在$0\le x$，$0\le y$的部分。 (12%)

7. 給定$\vec{F}(x,y.z)=(0,-z^2,yz)$

(1) 請問是否存在一個向量場$\vec{G}$使得$\nabla\times\vec{G}=\vec{F}$，不論是或否請說明理由。(5%)

(2) 請問$\vec{F}$是否為一梯度向量場，即存在一純量場ϕ，使得$\nabla\phi=\vec{F}$，不論是或否請說明理由。 (5%)

(3) $S=\{(x,y,z\}:x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0\}$，請直接計算面積分$\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$。

(8%) (hint: $d\vec{S}=\vec{n}dA$)(請勿使用任何積分定理)

(4) 請使用史托克定理(Stokes' theorem)驗證(3)之結果。 (8%)

Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla\cdot\vec{F}\ dV=\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\ dA$ **(3D)** $\iint \nabla\cdot\vec{F}\ dA=\oint\vec{F}\cdot\vec{n}\ ds$ **(2D)**

格林定理: $\int P\,dx+Q\,dy=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\ dA=\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}$

曲率: $\kappa=\frac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率:** $\tau=\left|\frac{d(\vec{T}(s)\times\vec{N}(s))}{ds}\right|$

二倍角公式: $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$**,** $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

圓球體積: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ **圓球表面積:** $S=4\pi r^2$

$z=f(x,y)$ $\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x\vec{i}+y\vec{j}+f(x,y)\vec{k}$

$dA=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right|dxdy=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dxdy$

參考解答:

1. **已知一圓球** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ **與一平面** $ax+by+cz=1$**相交於一點** $P=(3,3,3)$ **，試問** a **、** b **與** c **為何? (10%)** **(108 交大機械丁組)**

圓球 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ 與平面 $ax+by+cz=1$

相交於一點 $P=(3,3,3)$

故可知 $3a+3b+3c=1$

令 $\phi=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-12$

$$\Rightarrow \nabla\phi=2(x-1)\vec{i}+2(y-1)\vec{j}+2(z-1)\vec{k}$$

圓球在點 P 的法向量為 $4\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}=4(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$

又平面 $ax+by+cz=1$ 的法向量為 $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$

$\because$ 兩者相互平行

$\therefore\ \dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{c}{1}$

又 $3a+3b+3c=1$

可得 $a=b=c=\dfrac{1}{9}$

2. **某一質點在空間中移動，其位置向量(單位為 m)為** $\vec{r}(t)=\dfrac{t^3}{3}\vec{i}+(t-2)\vec{j}+\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}\vec{k}$ **，其中** t **(sec)是時間，求此質點**

(1) **在** $t=2$ sec **到** $t=5$ sec **間之移動平均速率。** **(6%)**

(2) **在** $t=4$ sec **時之切線加速度向量。** **(6%)**

(1) $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}=t^2\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{2}t\vec{k}$

$$ds=|d\vec{r}(t)|=\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|dt=\sqrt{(t^2)^2+1^2+(\sqrt{2}t)^2}\,dt=(t^2+1)\,dt$$

$$s=\int ds=\int_2^5 (t^2+1)\,dt=42$$

$$v=\frac{42}{3}=14\ (\frac{\text{m}}{\text{s}})$$

(2) $\vec{a}(t)=\vec{r}''(t)=2t\,\vec{i}+\sqrt{2}\,\vec{k}$

單位切向量: $\vec{t}=\dfrac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}=\dfrac{t^2\,\vec{i}+\vec{j}+\sqrt{2}t\,\vec{k}}{t^2+1}$

在 $t=4\sec$ 單位切向量為 $\vec{t}=\dfrac{16\vec{i}+\vec{j}+4\sqrt{2}\,\vec{k}}{17}$

加速度向量為 $\vec{a}=8\vec{i}+\sqrt{2}\,\vec{k}$

切線加速度為 $\vec{a}_t=(\vec{a}\cdot\vec{t})\vec{t}=\dfrac{136}{17}(\dfrac{16\vec{i}+\vec{j}+4\sqrt{2}\,\vec{k}}{17})=\dfrac{8}{17}(16\vec{i}+\vec{j}+4\sqrt{2}\,\vec{k})$

3. 有一力 $\vec{F}=y^2\vec{i}+x^2\,\vec{j}+\cos^2 z\vec{k}$ 施加在某質點上，而此質點沿著軌跡 $\vec{r}=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$ 運動，試問:此力在質點上，由位置 $(1, 0, 0)$ 到 $(1, 0, 4\pi)$ 總共作了多少功? (10%) **(109 台科機械)**

功 $W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$\vec{r}=x\vec{i}+y\,\vec{j}+z\vec{k}=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\vec{k}$

$\therefore$ 可知 $x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad z=t$

由 $(1, 0, 0)$ 到 $(1, 0, 4\pi)$，即由 $t=0$ 到 $t=4\pi$

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}=-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k}\quad\Rightarrow d\vec{r}=(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k})\,dt$

$$\begin{aligned}
\therefore\ W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}&=\int_0^{4\pi}(y^2\vec{i}+x^2\,\vec{j}+\cos^2 z\vec{k})\cdot(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k})\,dt\\
&=\int_0^{4\pi}(-y^2\sin t+x^2\cos t+\cos^2 z)\,dt\\
&=\int_0^{4\pi}(-\sin^3 t+\cos^3 t+\cos^2 t)\,dt\\
&=\int_0^{4\pi}\sin^2 t\,d(\cos t)+\int_0^{4\pi}\cos^2 t\,d(\sin t)+\int_0^{4\pi}\cos^2 t\,dt\\
&=\int_0^{4\pi}(1-\cos^2 t)\,d(\cos t)+\int_0^{4\pi}(1-\sin^2 t)\,d(\sin t)+\int_0^{4\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt\\
&=(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t)\Big|_0^{4\pi}+(\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t)\Big|_0^{4\pi}+\frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{4\pi}\\
&=2\pi
\end{aligned}$$

4. 三尖瓣線之位置向量為 $\vec{r}(t)=a(2\cos t+\cos 2t)\vec{i}+a(2\sin t-\sin 2t)\vec{j}$ ，其中 $0\le t\le 2\pi$ ，試問:

(1) 此三尖瓣線之周長。 **(6%)**

(2) 試以格林定理: $\oint f dx+g dy=\iint(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy$，給定 $f=-y$ 與 $g=x$ 來求此三尖瓣線之面積。 **(6%)**

(3) 試求在點 $(-a,0)$ 之曲率 κ。 **(6%)**

(1) $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=a(2\cos t+\cos 2t)\vec{i}+a(2\sin t-\sin 2t)\vec{j}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=a(2\cos t+\cos 2t)\\ y=a(2\sin t-\sin 2t)\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2a(\sin t+\sin 2t)\\ \dfrac{dy}{dt}=2a(\cos t-\cos 2t)\end{cases}$$

$$S=\int ds=\int|d\vec{r}|=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\ dt$$

$$=3\int_0^{\frac{2\pi}{3}}2a\sqrt{(\sin t+\sin 2t)^2+(\cos t-\cos 2t)^2}\ dt$$

$$=6\sqrt{2}\,a\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\sqrt{1-\cos 3t}\ dt$$

$$=12a\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\sin\frac{3t}{2}\ dt$$

$$=-8a\cdot\cos\frac{3t}{2}\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$=16a$$

(2) $\oint -ydx+xdy=2\iint dxdy=2A$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\oint -ydx+xdy$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}[(2\sin t-\sin 2t)(\sin t+\sin 2t)+(2\cos t+\cos 2t)(\cos t-\cos 2t)]dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos 3t)\,dt$$

$$=2\pi a^2$$

(3) $\kappa = \dfrac{|\vec r'(t)\times \vec r''(t)|}{[\vec r'(t)\cdot \vec r'(t)]^{\frac{3}{2}}}$

$$\vec r'(t) = x'\vec i + y'\vec j$$
$$\vec r''(t) = x''\vec i + y''\vec j$$

$$\kappa = \frac{|\vec r'(t)\times \vec r''(t)|}{[\vec r'(t)\cdot \vec r'(t)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|x'y''-x''y'|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = a(2\cos t+\cos 2t) \quad \Rightarrow x' = \frac{dx}{dt} = -2a(\sin t+\sin 2t)$$
$$\Rightarrow x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = -2a(\cos t+2\cos 2t)$$
$$y = a(2\sin t-\sin 2t) \quad \Rightarrow y' = \frac{dy}{dt} = 2a(\cos t-\cos 2t)$$
$$\Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = -2a(\sin t-2\sin 2t)$$

$$\kappa = \left|\frac{x'y''-x''y'}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\right| = \left|\frac{4a^2(1-\cos 3t)}{8a^3[2(1-\cos 3t)]^{\frac{3}{2}}}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{4\sqrt{2}\,a\cdot\sqrt{(1-\cos 3t)}}\right| = \left|\frac{1}{8a\cdot \sin\frac{3}{2}t}\right|$$

將點 $(-a,0)$ 即 $t=\pi$ 代入，可得 $\kappa = \dfrac{1}{8a}$

5. P 為四頂點 $A(2,2)$，$B(4,3)$，$C(3,5)$，$D(5,6)$ 所圍之平行四邊形區域。試由格林定理計算 $\oint_C (-y+6x^2y+3xy^2)\,dx+(3x^2y+2x^3+5x)\,dy$ 其中 C 為包圍區域 P 之邊界。(12%)

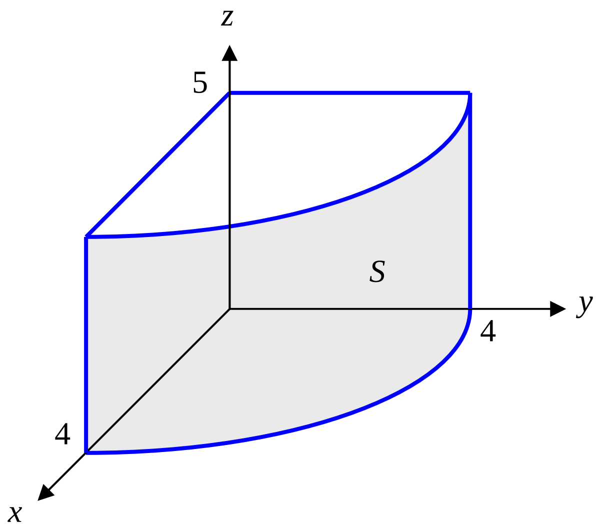
由格林定理可知:

$$\oint_C (-y+6x^2y+3xy^2)\,dx+(3x^2y+2x^3+5x)\,dy$$
$$=\iint_P \left[\frac{\partial(3x^2y+2x^3+5x)}{\partial x}-\frac{\partial(-y+6x^2y+3xy^2)}{\partial y}\right]dxdy$$
$$=\iint_P (6xy+6x^2+5+1-6x^2-6xy)\,dxdy$$
$$=\iint_P 6\,dxdy = 6A = 30$$

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j}$，$\overrightarrow{AC} = \vec{i} + 3\vec{j}$

平行四邊形面積 $A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|5\vec{k}\right| = 5$

6. **試計算** $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$ **，其中** $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} - 3y^2 z\vec{k}$ **，** S **為圓柱體** $x^2 + y^2 = 16$ **，** $0 \le z \le 5$ **在** $0 \le x$ **，** $0 \le y$ **的部分。 (12%)** **(106 中興環工甲組)**



曲面 S 上

$x = 4\cos\theta$，$y = 4\sin\theta$，$z = z$

$dA = 4d\theta dz$

$\vec{n} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} - 3y^2 z\vec{k} = z\vec{i} + 4\cos\theta\,\vec{j} - 48z\sin^2\theta\,\vec{k}$

$$\therefore \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA = \int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (z\vec{i} + 4\cos\theta\,\vec{j} - 48z\sin^2\theta\,\vec{k}) \cdot (\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j})\, 4d\theta dz$$

$$= 4\int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (z\cos\theta + 4\cos\theta\sin\theta)\, d\theta dz$$

$$= 4\int_0^5 (z\sin\theta - \cos 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dz$$

$$= 4\int_0^5 (z + 2)\, dz$$

$$= 90$$

7. **給定** $\vec{F}(x, y.z) = (0, -z^2, yz)$

(1) 請問是否存在一個向量場 $\vec{G}$ **使得** $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$**，不論是或否請說明理由。(5%)**

(2) 請問 $\vec{F}$ **是否為一梯度向量場，即存在一純量場** ϕ**，使得** $\nabla \phi = \vec{F}$ **，不論是或否請說明理由。 (5%)**

(3) $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\}$ **，請直接計算面積分** $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ **。**

(hint: $d\vec{S} = \vec{n} dA$**)(請勿使用任何積分定理) (8%)**

(4) 請使用史托克定理(Stokes' theorem)驗證(3)之結果。 (8%) (109 台大土木)

(1) $\vec{F}(x, y.z) = -z^2 \vec{j} + yz\vec{k} \quad \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = y$

若存在一向量場 $\vec{G}$ 使得 $\nabla \times \vec{G} = \vec{F} \quad \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = y$

$\because$ 任何旋轉場必不具備發散性，即 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = 0$

又由上述結果可知 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{G}) = y$

在此顯然不相符

$\therefore$ 不存在 $\vec{G}$ 使得 $\nabla \times \vec{G} = \vec{F}$

(2) $\vec{F}(x, y.z) = -z^2 \vec{j} + yz\vec{k} \quad \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -z^2 & yz \end{vmatrix} = 3z\vec{i}$

若 $\vec{F}$ 為一梯度向量場，即存在一純量場 ϕ，使得 $\nabla \phi = \vec{F}$

又 $\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla \phi) = 3z\vec{i}$

但因任何梯度場必不具備旋轉性，即 $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

又由上述結果可知 $\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla \phi) = 3z\vec{i} \neq 0$

顯然與上述定理 $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ 不相符

$\therefore \vec{F}$ 不是一梯度向量場

(3) $S=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1,\, x\geq 0\}$ 為半徑為 1 在 y-z 平面上之半球

即 $0\leq\phi\leq\dfrac{\pi}{2}$ 與 $\dfrac{3\pi}{2}\leq\phi\leq 2\pi$ 並且 $0\leq\theta\leq\pi$

$\therefore\quad x=\sin\theta\cos\phi,\quad y=\sin\theta\sin\phi,\quad z=\cos\theta$

$dA=\sin\theta d\theta d\phi$

$\vec{n}=\sin\theta\cos\phi\vec{i}+\sin\theta\sin\phi\vec{j}+\cos\theta\vec{k}$

$$\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}dA$$

$$=\int\int_0^{\pi}3z\vec{i}\cdot(\sin\theta\cos\phi\vec{i}+\sin\theta\sin\phi\vec{j}+\cos\theta\vec{k})\sin\theta d\theta d\phi$$

$$=\int\int_0^{\pi}3\cos\theta\sin^2\theta\cos\phi d\theta d\phi$$

$$=\int\sin^3\theta\cos\phi\Big|_0^{\pi}d\phi$$

$$=0$$

(4) 由 Stokes 旋度定理: $\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}$

C: $x=0$，$y^2+z^2=1$

令 $y=\cos\alpha$，$z=\sin\alpha$

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\cos\alpha\,\vec{j}+\sin\alpha\vec{k}$

$\Rightarrow d\vec{r}=(-\sin\alpha\,\vec{j}+\cos\alpha\vec{k})\,d\alpha$

$\vec{F}=-z^2\vec{j}+yz\vec{k}=-\sin^2\alpha\vec{j}+\cos\alpha\sin\alpha\vec{k}$

$$\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_0^{2\pi}(-\sin^2\alpha\vec{j}+\cos\alpha\sin\alpha\vec{k})\cdot(-\sin\alpha\,\vec{j}+\cos\alpha\vec{k})d\alpha$$

$$=\int_0^{2\pi}(\sin^3\alpha+\cos^2\alpha\sin\alpha)d\alpha$$

$$=\int_0^{2\pi}\sin\alpha\,d\alpha$$

$$=0$$