國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(二) 第一次大考

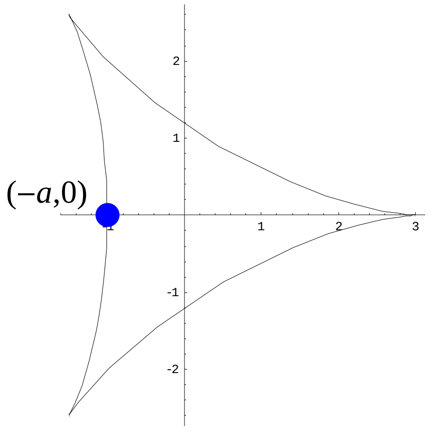
系級：____________　　學號：____________　　姓名：____________

1. 已知一圓球 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ 與一平面 $ax+by+cz=1$ 相交於一點 $P=(3,3,3)$，試問 a 、b 與 c 為何? (10%)

2. 某一質點在空間中移動,其位置向量(單位為 m)為 $\vec{r}(t)=\dfrac{t^3}{3}\vec{i}+(t-2)\vec{j}+\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}\vec{k}$，其中 t(sec)是時間，求此質點
   (1) 在 $t=2$ sec 到 $t=5$ sec 間之移動平均速率。 (6%)
   (2) 在 $t=4$ sec 時之切線加速度向量。 (6%)

3. 有一力 $\vec{F}=y^2\vec{i}+x^2\vec{j}+\cos^2 z\vec{k}$ 施加在某質點上，而此質點沿著軌跡 $\vec{r}=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+t\vec{k}$ 運動，試問:此力在質點上，由位置 $(1,0,0)$ 到 $(1,0,4\pi)$ 總共作了多少功? (10%)

4. 三尖辮線之位置向量為 $\vec{r}(t)=a(2\cos t+\cos 2t)\vec{i}+a(2\sin t-\sin 2t)\vec{j}$，其中 $0\le t\le 2\pi$，試問:
   (1) 此三尖辮線之周長。 (6%)
   (2) 試以格林定理: $\oint fdx+gdy=\iint(\dfrac{\partial g}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y})dxdy$，給定 $f=-y$ 與 $g=x$ 來求此三尖辮線之面積。 (6%)
   (3) 試求在點 $(-a,0)$ 之曲率 κ。 (6%)



5. P 為四頂點 $A(2,2)$, $B(4,3)$, $C(3,5)$, $D(5,6)$ 所圍之平行四邊形區域。試由格林定理計算 $\oint_C(-y+6x^2y+3xy^2)\,dx+(3x^2y+2x^3+5x)\,dy$ 其中 C 為包圍區域 P 之邊界。(12%)

6. 試計算$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$，其中$\vec{F}=z\vec{i}+x\vec{j}-3y^2z\vec{k}$，$S$為圓柱體$x^2+y^2=16$，

$0\le z\le 5$在$0\le x$, $0\le y$的部分。 (12%)

7. 給定$\vec{F}(x,y.z)=(0,-z^2,yz)$

(1) 請問是否存在一個向量場$\vec{G}$使得$\nabla\times\vec{G}=\vec{F}$，不論是或否請說明理由。(5%)

(2) 請問$\vec{F}$是否為一梯度向量場，即存在一純量場ϕ，使得$\nabla\phi=\vec{F}$，不論是或否請說明理由。 (5%)

(3) $S=\{(x,y,z\}:x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0\}$，請直接計算面積分$\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$。

(8%) (hint: $d\vec{S}=\vec{n}dA$)(請勿使用任何積分定理)

(4) 請使用史托克定理(Stokes' theorem)驗證(3)之結果。 (8%)

Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint\nabla\cdot\vec{F}\,dV=\oiint\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$ **(3D)** $\iint\nabla\cdot\vec{F}\,dA=\oint\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ **(2D)**

格林定理: $\int P\,dx+Q\,dy=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}$

曲率: $\kappa=\dfrac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率:** $\tau=\left|\dfrac{d(\vec{T}(s)\times\vec{N}(s))}{ds}\right|$

二倍角公式: $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$**,** $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

圓球體積: $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ **圓球表面積:** $S=4\pi r^2$

$z=f(x,y)\qquad \vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x\vec{i}+y\vec{j}+f(x,y)\vec{k}$

$dA=\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right|dxdy=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dxdy$