國立臺灣海洋大學河海工程學系 2022 工程數學(二) 期末考參考解答

系級：____________ 學號：____________ 姓名：____________

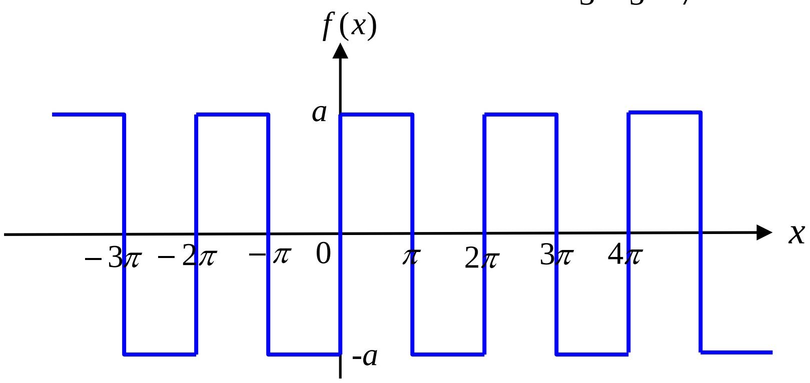
考試方式： Open book

注意事項：
1. 請使用A4 白紙作答，並於每一頁上方標明 **班別**、**學號**、**姓名**與 **頁碼**（例如：P.1, P.2, ...）
2. 作答完畢後，請拍照或掃描試卷，並使用學校電子信箱發 e-mail 到 ytlee@mail.ntou.edu.tw。請保留信件內容，已防止如果沒收到你們的 email 時，可由寄件備份再次轉發郵件以當證明。
3. 請自己作答，禁止與他人討論。

1. 給 $y''-12y'+4(7+\lambda)y=0$，$y(0)=y(5)=0$，試求其特徵值與特徵函數。(10%)

2. 已知 $f(x)=6-x^2$ 就其在區間 $(0,2)$ 之部分，全幅展開得 $g(x)$，半幅正弦展開得 $G(x)$，半幅餘弦展開得 $F(x)$，請畫出 $f(x)$、$g(x)$、$G(x)$ 與 $F(x)$ 之圖形，並問: $g(-1)$、$F(2)$、$F(-1)$、$G(2)$ 與 $G(-5)$ 之值為何? (18%)

3. 試求下圖函數 $f(x)$ 之傅立葉級數展開，並求 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=?$ (10%)



4. 已知函數 $f(x)=e^{-|x|}\sin x$

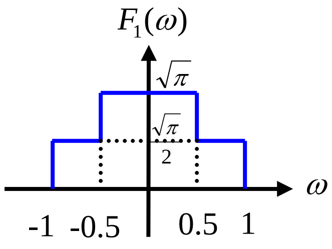
   (1) 試求其傅立葉積分表示式。 (6%)

   (2) 試計算 $\int_0^{\infty}\frac{\omega\sin 3\omega\cos 2\omega}{4+\omega^4}d\omega=?$ (4%)

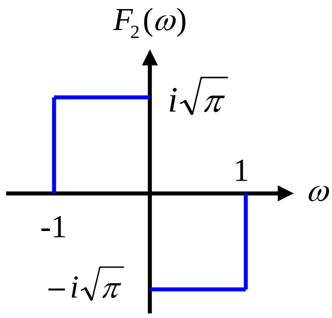
5. 給一訊號 $f(t)$ 其傅立葉轉換可定義為 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$

   (1) 試求 A，其中 $A=\int_{-\infty}^{\infty}|f_1(t)|^2\,dt$ 而 $f_1(t)$ 的傅立葉轉換如下圖(a)所示。(6%)

(2) 試求 B，其中 $B=\frac{d}{dt}f_2(t)\Big|_{t=0}$ 而 $f_2(t)$ 的傅立葉轉換如下圖(b)所示。(6%)

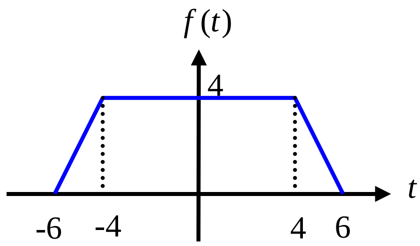


圖(a)



圖(b)

6. 給一函數 $f(t)$ 如下圖所示
   (1) 試求其傅立葉轉換 $F(\omega)$。 (6%)
   (2) 試計算 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\cos 4\omega-\cos 6\omega)^2}{\omega^4}d\omega=?$ (4%)



7. 試求:

   (1) $\mathcal{L}[\sin^3 t]$ (2) $\mathcal{L}[t^3e^{-3t}]$ (3) $\mathcal{L}[e^{2t}\cos 3t]$ (4) $\mathcal{L}[\frac{2}{t}(1-\cos 2t)]$ (20%)

8. 試求:

   (1) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{2s^2+s+1}{s^3-3s^2+3s-1}]$ (2) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2-4s+5}]$ (3) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{16}{s^4-16}]$ (4) $\mathcal{L}^{-1}[\tan^{-1}s]$

   (20%)

9. 試以拉普拉斯轉換求解下述微分方程式
   (1) $y''+2y'+2y=\delta(t-1)$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$ (10%)

   (2) $y(t)=\sin t+\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$, $y(0)=y'(0)=0$ (10%)

10. 試求解下述聯立微分方程組 (20%)

$$\begin{cases} x'+y'+x-y=0 \\ x'+2y'+x=1 \end{cases}$$ 且 $x(0)=y(0)=0$。

11. 對工數的遠距教學有何感想? (5%) 對遠距教學上課方式有何建議? (5%)
    (請各別作答)

參考解答：

1. 給 $y''-12y'+4(7+\lambda)y=0$，$y(0)=y(5)=0$，**試求其特徵值與特徵函數。(10%)**

令 $y=e^{mx}$ 帶入 ODE 可得 $[m^2-12m+4(7+\lambda)]e^{mx}=0$

$$\Rightarrow m^2-12m+4(7+\lambda)=0$$

$$\Rightarrow m=6\pm 2\sqrt{2-\lambda}$$

(a) 令 $\lambda=2-k^2 \quad \Rightarrow y(x)=e^{6x}(c_1\cosh 2kx+c_2\sinh 2kx)$

由 $y(0)=0 \;\Rightarrow c_1=0$

$y(5)=0 \;\Rightarrow c_2=0$

(b) 令 $\lambda=2 \quad \Rightarrow y(x)=e^{6x}(c_1+c_2x)$

由 $y(0)=0 \;\Rightarrow c_1=0$

$y(5)=0 \;\Rightarrow c_2=0$

(c) 令 $\lambda=2+k^2 \quad \Rightarrow y(x)=e^{6x}(c_1\cos 2kx+c_2\sin 2kx)$

由 $y(0)=0 \;\Rightarrow c_1=0$

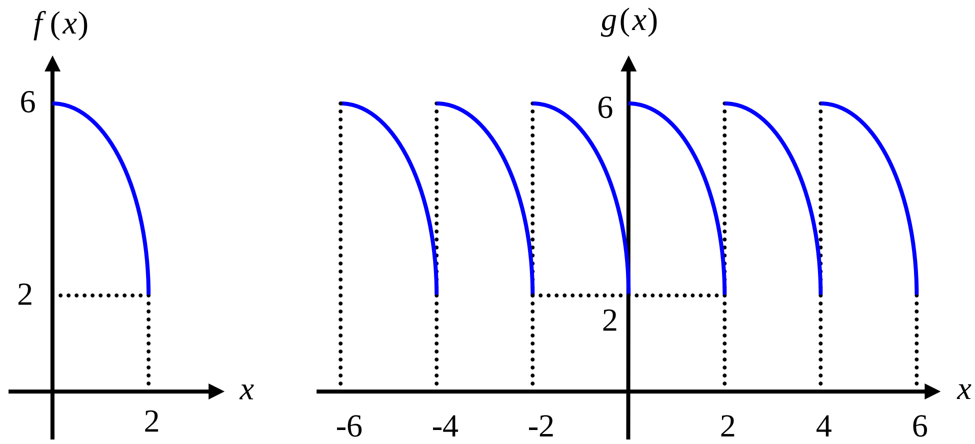
$y(5)=0 \;\Rightarrow c_2e^{30}\sin 10k=0$

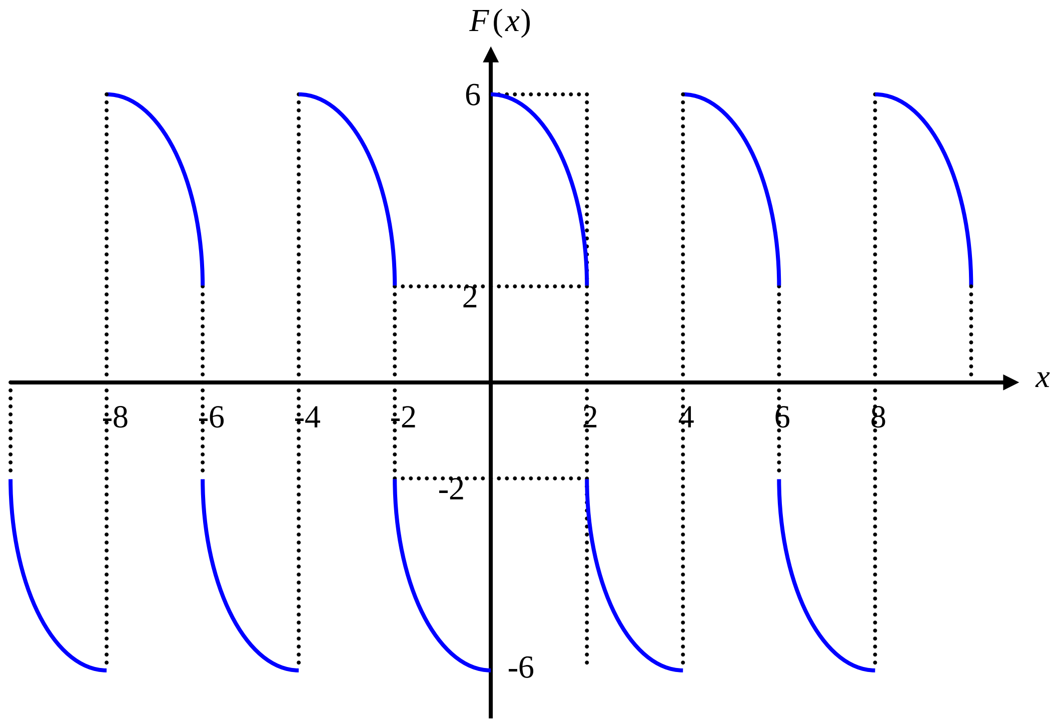
$\therefore$ 可知其為 $\sin 10k=0 \;\Rightarrow k=\dfrac{n\pi}{10}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$

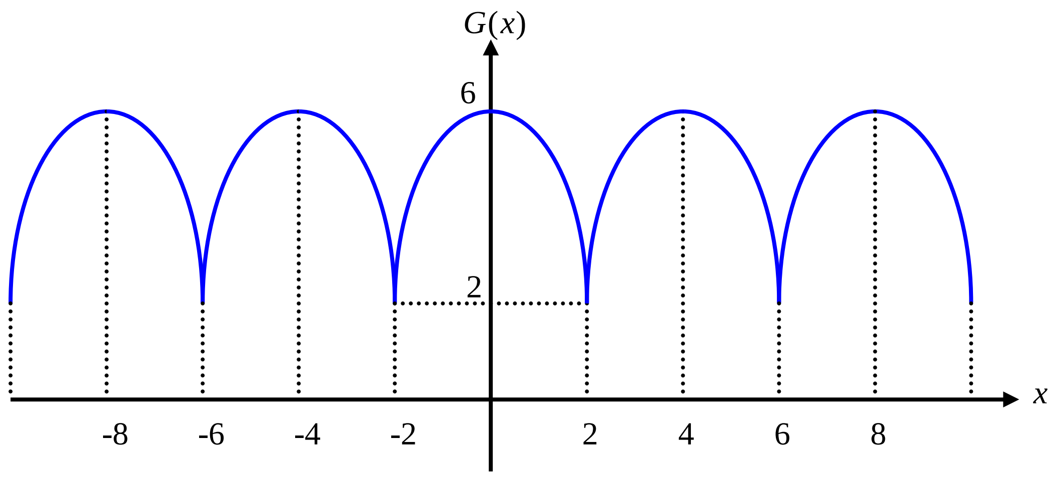
故特徵值為 $\lambda_n=2+k^2=2+(\dfrac{n\pi}{10})^2$

特徵函數為 $y_n(x)=e^{6x}\sin\dfrac{n\pi x}{5}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$

2. 已知 $f(x)=6-x^2$ 就其在區間 $(0,2)$ 之部分，全幅展開得 $g(x)$，半幅正弦展開得 $G(x)$，半幅餘弦展開得 $F(x)$，請畫出 $f(x)$、$g(x)$、$G(x)$ 與 $F(x)$ 之圖形，並問：$g(-1)$、$F(2)$、$F(-1)$、$G(2)$ 與 $G(-5)$ 之值為何? **(18%)**







$g(-1) = g(1) = f(1) = 5$

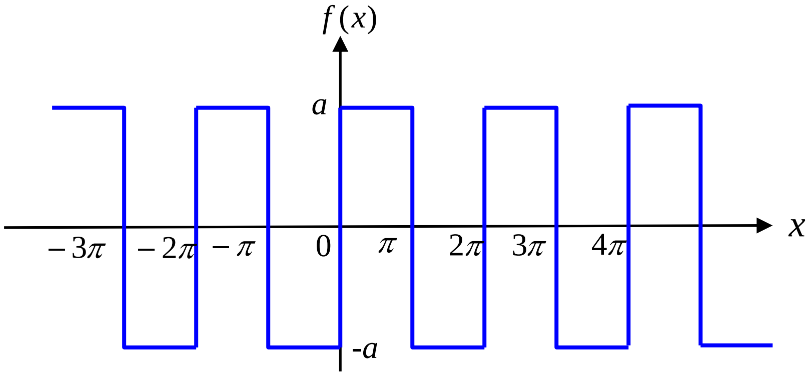
$F(2) = \dfrac{F(2^-) + F(2^+)}{2} = 0$

$F(-1) = -F(1) = -f(1) = -5$

$G(2) = f(2) = 2$

$G(-5) = G(-1) = G(1) = f(1) = 5$

3. **試求下圖函數** $f(x)$ **之傅立葉級數展開，並求** $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=?$ **(10%)**



由圖可看出此為奇函數，週期 $T=2\pi$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}$$

$$a_0=a_n=0$$

$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2a}{\pi}(-\frac{1}{n})\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2a}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\frac{2a}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$$

當 n 為偶數時， $f(x)=0$

當 n 為奇數時， $f(x)=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$

若 $x=\frac{\pi}{2}$ ，則 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$

$$=\frac{4a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4a}\cdot a=\frac{\pi}{4}$$

4. 已知函數 $f(x)=e^{-|x|}\sin x$

(1) 試求其傅立葉積分表示式。 (6%)

(2) 試計算 $\int_0^\infty \frac{\omega\sin 3\omega\cos 2\omega}{4+\omega^4}d\omega=?$ (4%)

(1) 由 $f(x)=-f(-x)$ 可知此為奇函數

$\therefore A(\omega)=0$

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin x\sin\omega x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}[\cos(1-\omega)x-\cos(1+\omega)x]\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}[\frac{1}{1+(1-\omega)^2}-\frac{1}{1+(1+\omega)^2}]$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{[1+(1+\omega)^2]-[1+(1-\omega)^2]}{[1+(1-\omega)^2]\cdot[1+(1+\omega)^2]}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{4\omega}{(2+\omega^2)^2-(2\omega)^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{4\omega}{4+\omega^4}$$

$$\therefore f(x)=\int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\sin\omega x}{4+\omega^4}d\omega$$

(2) $$\int_0^\infty \frac{\omega\sin 3\omega\cos 2\omega}{4+\omega^4}d\omega=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\omega[\sin(3\omega+2\omega)+\sin(3\omega-2\omega)]}{4+\omega^4}d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\omega[\sin 5\omega+\sin\omega]}{4+\omega^4}d\omega$$

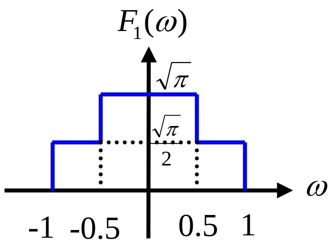
$$=\frac{1}{2}[\frac{\pi}{4}f(5)+\frac{\pi}{4}f(1)]$$

$$=\frac{\pi}{8}(e^{-5}\sin 5+e^{-1}\sin 1)$$

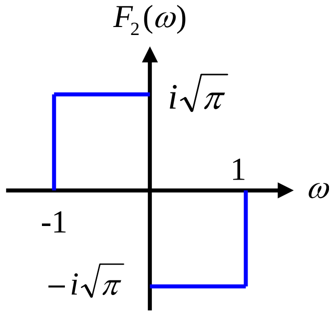
5. 給一訊號 $f(t)$ 其傅立葉轉換可定義為 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}dt$

(1) 試求 $\boldsymbol{A}$，其中 $A=\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|^2\,dt$ 而 $f_1(t)$ 的傅立葉轉換如下圖**(a)**所示。 **(6%)**

(2) 試求 $\boldsymbol{B}$，其中 $B=\left.\frac{d}{dt}f_2(t)\right|_{t=0}$ 而 $f_2(t)$ 的傅立葉轉換如下圖**(b)**所示。 **(6%)**



圖(a)



圖(b)

(1) 由 Parseval 定理可知 $\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_1(\omega)|^2\,d\omega$

$$\therefore\quad A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F_1(\omega)|^2\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot[\frac{1}{2}\cdot(\frac{\sqrt{\pi}}{2})^2+\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{\pi})^2]=\frac{5}{8}$$

(2) $\mathcal{F}[f_2'(t)]=i\omega F_2(\omega) \quad \Rightarrow f_2'(t)=\mathcal{F}^{-1}[i\omega F_2(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega F_2(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega$

$$\therefore\quad B=\left.\frac{d}{dt}f_2(t)\right|_{t=0}=\left.\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega F_2(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega\right]\right|_{t=0}$$

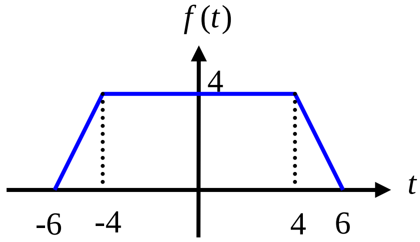
$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-1}^{0} i^2\omega\sqrt{\pi}\,d\omega-\int_{0}^{1} i^2\omega\sqrt{\pi}\,d\omega\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

6. 給一函數 $f(t)$ 如下圖所示

(1) 試求其傅立葉轉換 $F(\omega)$。 (6%)

(2) 試計算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos 4\omega - \cos 6\omega)^2}{\omega^4} d\omega = ?$ (4%)



由圖可知此為偶函數

(1) $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = 2\left[\int_0^4 4\cos\omega t\, dt + \int_4^6 2(6-t)\cos\omega t\, dt\right]$

$$= 2\left[\frac{4}{\omega}\sin 4\omega + (-\frac{2}{\omega^2}\cos 6\omega - \frac{4}{\omega}\sin 4\omega + \frac{2}{\omega^2}\cos 4\omega)\right]$$

$$= \frac{4}{\omega^2}(\cos 4\omega - \cos 6\omega)$$

(2) 由 Parseval 定理可知 $\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\omega)|^2 d\omega$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F_1(\omega)|^2 d\omega = \frac{16}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos 4\omega - \cos 6\omega)^2}{\omega^4} d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)|^2 dt = 2\left[\int_0^4 4^2 dt + \int_4^6 4(6-t)^2 dt\right] = 2\left[64 + \frac{32}{3}\right] = \frac{448}{3}$$

$$\therefore \frac{16}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos 4\omega - \cos 6\omega)^2}{\omega^4} d\omega = \frac{448}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos 4\omega - \cos 6\omega)^2}{\omega^4} d\omega = \frac{56}{3}\pi$$

7. 試求:

(1) $\mathcal{L}[\sin^3 t]$ **(2)** $\mathcal{L}[t^3 e^{-3t}]$ **(3)** $\mathcal{L}[e^{2t}\cos 3t]$ **(4)** $\mathcal{L}[\frac{2}{t}(1-\cos 2t)]$ **(20%)**

(1) $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t \quad \Rightarrow \sin^3 t = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)$

$$\therefore \mathcal{L}[\sin^3 t] = \mathcal{L}[\frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)] = \frac{1}{4}(\frac{3}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+9}) = \frac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$$

(2) $\mathcal{L}[t^3] = \frac{6}{s^4} \quad \Rightarrow \mathcal{L}[t^3 e^{-3t}] = \frac{6}{(s+3)^4}$

(3) $\mathcal{L}[\cos 3t] = \frac{s}{s^2+9} \quad \Rightarrow \mathcal{L}[e^{2t}\cos 3t] = \frac{s-2}{(s-2)^2+9}$

(4) $\mathcal{L}[1-\cos 2t]=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}=\frac{4}{s(s^2+4)}$

$$\mathcal{L}[\frac{2}{t}(1-\cos 2t)]=2\int_s^\infty(\frac{1}{\tau}-\frac{\tau}{\tau^2+4})d\tau=2[\ln\tau-\frac{1}{2}\ln(\tau^2+4)]\Big|_s^\infty$$

$$=\ln\frac{\tau^2}{\tau^2+4}\Big|_s^\infty=\ln\frac{s^2+4}{s^2}$$

8. 試求:

(1) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{2s^2+s+1}{s^3-3s^2+3s-1}]$ **(2)** $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2-4s+5}]$ **(3)** $\mathcal{L}^{-1}[\frac{16}{s^4-16}]$ **(4)** $\mathcal{L}^{-1}[\tan^{-1}s]$

(20%)

(1) $\frac{2s^2+s+1}{s^3-3s^2+3s-1}=\frac{2s^2+s+1}{(s-1)^3}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C}{(s-1)^3}$

通分後可得 $A(s-1)^2+B(s-1)+C=2s^2+s+1$

比較 s^2 係數可知 $A=2$

比較 s 係數可知 $-2A+B=1 \quad \Rightarrow B=5$

比較 1 係數可知 $A-B+C=1 \quad \Rightarrow C=4$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}[\frac{2s^2+s+1}{s^3-3s^2+3s-1}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s-1}+\frac{5}{(s-1)^2}+\frac{4}{(s-1)^3}]$$

$$=2e^t+5te^t+2t^2e^t$$

$$=e^t(2+5t+2t^2)$$

(2) $\frac{s}{s^2-4s+5}=\frac{s}{(s-2)^2+1}=\frac{s-2}{(s-2)^2+1}+\frac{2}{(s-2)^2+1}$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2-4s+5}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{s-2}{(s-2)^2+1}+\frac{2}{(s-2)^2+1}]=e^{2t}\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+1}+\frac{2}{s^2+1}]$$

$$=e^{2t}(\cos t+2\sin t)$$

(3) $\frac{16}{s^4-16}=\frac{16}{(s^2+4)(s^2-4)}=[\frac{2}{(s^2-4)}-\frac{2}{(s^2+4)}]$

$$\therefore \mathcal{L}^{-1}[\frac{16}{s^4-16}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{(s^2-4)}-\frac{2}{(s^2+4)}]=\sinh 2t-\sin 2t$$

(4) $\int\frac{1}{1+u^2}du=\tan^{-1}u$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\tan^{-1}s \qquad \Rightarrow \mathcal{L}[t\,f(t)]=-\frac{d(\tan^{-1}s)}{ds}=-\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow t\,f(t)=\mathcal{L}^{-1}[-\frac{1}{s^2+1}]=-\sin t$$

$$\Rightarrow f(t)=-\frac{1}{t}\sin t$$

9. 試以拉普拉斯轉換求解下述微分方程式

(1) $y''+2y'+2y=\delta(t-1)$，$y(0)=1$，$y'(0)=-1$ **(10%)**

(2) $y(t)=\sin t+\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$ **(10%)**

(1) $\mathcal{L}[y''+2y'+2y]=\mathcal{L}[\delta(t-1)]$

$\Rightarrow s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2sY(s)-2y(0)+2Y(s)=e^{-s}$

$\Rightarrow (s^2+2s+2)Y(s)=e^{-s}+s+1$

$\Rightarrow Y(s)=\dfrac{e^{-s}+s+1}{(s+1)^2+1}$

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{e^{-s}+s+1}{(s+1)^2+1}]=e^{-(t-1)}\sin(t-1)u(t-1)+e^{-t}\cos t$

(2) $\mathcal{L}[y(t)]=\mathcal{L}[\sin t+\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau]$

$\Rightarrow Y(s)=\dfrac{1}{s^2+1}+\dfrac{1}{s^2+1}Y(s)$

$\Rightarrow \dfrac{s^2}{s^2+1}Y(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$

$\Rightarrow Y(s)=\dfrac{1}{s^2}$

$\Rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=t$

10. 試求解下述聯立微分方程組 (20%)

$\begin{cases} x'+y'+x-y=0 \\ x'+2y'+x=1 \end{cases}$ 且 $x(0)=y(0)=0$ 。

$\begin{cases} x'+y'+x-y=0 \\ x'+2y'+x=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}[x'+y'+x-y]=0 \\ \mathcal{L}[x'+2y'+x]=\mathcal{L}[1] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} sX(s)-x(0)+sY(s)-y(0)+X(s)-Y(s)=0 \\ sX(s)-x(0)+2sY(s)-2y(0)+X(s)]=\dfrac{1}{s} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (s+1)X(s)+(s-1)Y(s)=0 \\ (s+1)X(s)+2sY(s)=\dfrac{1}{s} \end{cases}$

$\Rightarrow Y(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$, $X(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}-\dfrac{2}{(s+1)^2}$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s+1)}] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}] = 1 - e^{-t}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s+1)} - \frac{2}{(s+1)^2}] = 1 - e^{-t} - 2te^{-t}$$