國立臺灣海洋大學河海工程學系 2021 工程數學(一) 第十一次作業參考解答

系級：__________ 學號：__________ 姓名：__________

1. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}11 & -4 & -7\\ 7 & -2 & -5\\ 10 & -4 & -6\end{bmatrix}$

(1) 試求 $\mathbf{A}$ 之特徵值、特徵向量並將 $\mathbf{A}$ 對角化。

(2) 若 $f(x)=x^2+2x+1$，試求 $f(\mathbf{A})$ 之特徵值與特徵向量。

2. 已知 $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ -2 & 6\end{bmatrix}$

試求: $\mathbf{A}$ 、$\det(\mathbf{A})$ 、$\mathbf{A}^{-1}$ 、$\mathbf{A}^{10}$ 、$\mathbf{A}^3-2\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-2\mathbf{I}$ 、$e^{\mathbf{A}}$ 、$\cos(\mathbf{A})$

3. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}$

(1) 試求 $\mathbf{A}$ 之特徵值、特徵向量並求 $\mathbf{A}$ 的 Jordan form。

(2) 試求 $e^{\mathbf{A}t}$ 。

4. 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 4\end{bmatrix}$，求 $\mathbf{Q}$ 使得 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 為 Jordan form。

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -3 & -1 & -2\\ 7 & 5 & 6\end{bmatrix}$，試問:

(1) A 的特徵方程為何?

(2) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ ，則 $p=?$, $q=?$, $r=?$ $A^{-1}=?$

(3) 試以 Cayley-Hamilton 法計算 e^A 。

6. 試解: $\dfrac{dx}{dt}=Ax+z$ 其中 $A=\begin{bmatrix}-3 & -4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$, $z=\begin{Bmatrix}5e^t\\ -6e^t\end{Bmatrix}$ 。

參考解答:

1. (1) $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \;\Rightarrow \begin{vmatrix} 11-\lambda & -4 & -7 \\ 7 & -2-\lambda & -5 \\ 10 & -4 & -6-\lambda \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=0$

$$\Rightarrow \lambda = 0, 1, 2$$

當 $\lambda_1 = 0$ 時，可得 $\mathbf{x}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2 = 1$ 時，可得 $\mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_3 = 2$ 時，可得 $\mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{AS}=\mathbf{SD} \quad \Rightarrow \mathbf{D}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$

$$\Rightarrow \mathbf{D}=\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 & -4 & -7 \\ 7 & -2 & -5 \\ 10 & -4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) $f(\mathbf{A})$ 之特徵值為 $f(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1$

$\therefore\ \lambda_1 = f(0)=0$，$\lambda_2 = f(1)=4$，$\lambda_3 = f(2)=9$

特徵向量 $\mathbf{x}^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$， $\mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$， $\mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$

2. $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{B}^2=\begin{bmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{bmatrix}$

$\det(\mathbf{A})=36$

$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{36}\begin{bmatrix} 24 & -30 \\ 10 & -11 \end{bmatrix}$

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix} -11-\lambda & 30 \\ -10 & 24-\lambda \end{vmatrix}=0 \ \Rightarrow (\lambda-4)(\lambda-9)=0 \ \Rightarrow \lambda=4,9$$

當 $\lambda_1=4$ 時，可得 $\mathbf{x}^1=\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2=9$ 時，可得 $\mathbf{x}^2=\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AS}=\mathbf{SD} \quad \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{SDS}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^{10}=\mathbf{SD}^{10}\mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4^{10} & 0 \\ 0 & 9^{10} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\cdot 4^{10}-3\cdot 9^{10} & -6\cdot 4^{10}+6\cdot 9^{10} \\ 2\cdot 4^{10}-2\cdot 9^{10} & -3\cdot 4^{10}+4\cdot 9^{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^3-2\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-2\mathbf{I}&=\mathbf{S}(\mathbf{D}^3-2\mathbf{D}^2-3\mathbf{D}-2\mathbf{I})\mathbf{S}^{-1}\\ &=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 538 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1542 & 3120 \\ -1040 & 2098 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$e^{\mathbf{A}}=\mathbf{S}e^{\mathbf{D}}\mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\cdot e^4-3\cdot e^9 & -6\cdot e^4+6\cdot e^9 \\ 2\cdot e^4-2\cdot e^9 & -3\cdot e^4+4\cdot e^9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\sin(\mathbf{A})=\mathbf{S}\cdot\sin(\mathbf{D})\cdot\mathbf{S}^{-1}&=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin(4) & 0 \\ 0 & \sin(9) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} 4\cdot\sin(4)-3\cdot\sin(9) & -6\cdot\sin(4)+6\cdot\sin(9) \\ 2\cdot\sin(4)-2\cdot e^9 & -3\cdot\sin(4)+4\cdot\sin(9) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

3. (1) $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0 \ \Rightarrow -\lambda^3=0 \ \Rightarrow \lambda=0,0,0$

當 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 時，可得 $\mathbf{x}^1=\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix},\quad \mathbf{x}^2=\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$\because$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 只對應到 2 個特徵向量

$\therefore$ 需計算廣義特徵向量求 $\mathbf{x}^3$

$\because$ 由 $(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\mathbf{x}^3=\mathbf{x}^2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ （矛盾）

$\therefore$ 調整 $\mathbf{x}^2$

令 $\mathbf{x}^2 = c_1\begin{Bmatrix}-1\\1\\0\end{Bmatrix} + c_2\begin{Bmatrix}-1\\0\\1\end{Bmatrix}$ 取 $c_1 = 1$，$c_2 = 2$ 可得 $\mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix}1\\1\\-2\end{Bmatrix}$

由 $(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\mathbf{x}^3 = \mathbf{x}^2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\-2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\1\\-2\end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

令 $x_2 = s$，$x_3 = t \quad \Rightarrow x_1 = 1 - s - t$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1-s-t\\s\\t\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-1\\1\\0\end{Bmatrix}s + \begin{Bmatrix}-1\\0\\1\end{Bmatrix}t$$

取 $\mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}$

可得 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}^1 & \mathbf{x}^2 & \mathbf{x}^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & -2 & 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & -\frac{1}{2}\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

(2) $\mathbf{AP} = \mathbf{PJ} \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$

$$f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(\lambda) & 0 & 0\\0 & f(\lambda) & f'(\lambda)\\0 & 0 & f(\lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & -\frac{1}{2}\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0 & 0\\0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\0 & 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & -\frac{1}{2}\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}t+1 & t & t\\ t & t+1 & t\\ -2t & -2t & -2t+1\end{bmatrix}$$

4. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}0-\lambda & -3 & 1 & 2\\ -2 & 1-\lambda & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1-\lambda & 2\\ -2 & -3 & 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2-4\lambda+4)=0$

$$\Rightarrow \lambda = 0, 0, 2, 2$$

當 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 時，$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x}=\{0\} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & -3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^1=\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$$

當 $\lambda_3=\lambda_4=2$ 時，$(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\mathbf{x}=\{0\} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}-2 & -3 & 1 & 2\\ -2 & -1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -3 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^3=\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{Bmatrix},\ \mathbf{x}^4=\begin{Bmatrix}0\\ 1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$$

$\because$ $\lambda_1=\lambda_2=0$ 只對應到 1 個特徵向量

$\therefore$ 需計算廣義特徵向量求 $\mathbf{x}^2$

由 $(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\mathbf{x}^2=\mathbf{x}^1 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & -3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 取 \quad \mathbf{x}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

可得 $\mathbf{Q} = \left[\mathbf{x}^1 \ \mathbf{x}^2 \ \mathbf{x}^3 \ \mathbf{x}^4\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{AQ} = \mathbf{QJ} \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{QJQ}^{-1}$ 或是 $\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$

5. (1) $|A - \lambda I| = 0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -3 & -1-\lambda & -2 \\ 7 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$ (特徵方程式)

$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1, 2, 2$

(2) 由 Cayley-Hamilton 定理可知: $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0$

$\Rightarrow A^{-1}(A^3 - 5A^2 + 8A - 4I) = 0$

$\Rightarrow A^2 - 5A + 8I - 4A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}A^2 - \frac{5}{4}A + 2I$

$\therefore \quad p = \frac{1}{4}, \ q = -\frac{5}{4}, \ r = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}A^2 - \frac{5}{4}A + 2I = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -11 & -6 & -7 \\ 27 & 18 & 19 \end{bmatrix} - \frac{5}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ -8 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

(3) $e^A = Q(A)\cdot(A^3 - 5A^2 + 8A - 4I) + \overline{p}A^2 + \overline{q}A + \overline{r}I$

$\Rightarrow e^\lambda = Q(\lambda)\cdot(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4) + \overline{p}\lambda^2 + \overline{q}\lambda + \overline{r}$

代入 $\lambda = 1$ 可得 $e = \overline{p} + \overline{q} + \overline{r} \quad \ldots (1)$

代入 $\lambda = 2$ 可得 $e^2 = 4\overline{p} + 2\overline{q} + \overline{r} \quad \ldots (2)$

對λ微分$\Rightarrow e^\lambda = 2\lambda\,\overline{p} + \overline{q}$

微分後代入 $\lambda = 2$ 可得 $e^2 = 4\overline{p} + q \quad \ldots (3)$

解聯立後可得　$p=e$，$q=e^2-4e$，$r=4e-e^2$

$e^A=\bar{p}A^2+\bar{q}A+\bar{r}I$

$$=e\begin{bmatrix}-4&-4&-4\\-11&-6&-7\\27&18&19\end{bmatrix}+(e^2-4e)\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-3&-1&-2\\7&5&6\end{bmatrix}+(4e-e^2)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-e^2&-e^2&e^2\\e-3e^2&2e-2e^2&e-2e^2\\-e+7e^2&-2e+5e^2&-e+5e^2\end{bmatrix}$$

6. $\det(A-\lambda I)=0\ \Rightarrow\begin{vmatrix}-3-\lambda&-4\\5&6-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)=0\ \Rightarrow\lambda=1\text{ or }2$

當 $\lambda=1\quad\Rightarrow\begin{bmatrix}-4&-4\\5&5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\ \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$

當 $\lambda=2\quad\Rightarrow\begin{bmatrix}-5&-4\\5&4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}\ \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4\\-5\end{Bmatrix}$

$\therefore\quad A=SDS^{-1}=\begin{bmatrix}1&4\\-1&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\-1&-5\end{bmatrix}^{-1}$

令　$x=Sy\quad\Rightarrow S\dfrac{dy}{dt}=ASy+z\ \Rightarrow\dfrac{dy}{dt}=S^{-1}ASy+S^{-1}z$

$\therefore\quad\begin{Bmatrix}\dot{y}_1\\\dot{y}_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1&4\\-1&-5\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}5e^t\\-6e^t\end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{y}_1=y_1+e^t\\\dot{y}_2=2y_2+e^t\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}y_1=c_1e^t+te^t\\y_2=c_2e^{2t}-e^t\end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\-1&-5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}y_1+4y_2\\-y_1-5y_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}c_1e^t+4c_2e^{2t}+te^t-4e^t\\-c_1e^t-5c_2e^{2t}-te^t+5e^t\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}(c_1-4)e^t+4c_2e^{2t}+te^t\\(-c_1+5)e^t-5c_2e^{2t}-te^t\end{Bmatrix}$$