國立臺灣海洋大學河海工程學系 2021 工程數學(一) 第十次作業參考解答

系級：____________ 學號：____________ 姓名：____________

1. $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & 1\\1 & 4 & 2\\4 & 10 & -1\end{bmatrix}$, 試問: (1) $\det(A)=?$ (2) $A^{-1}=?$

2. $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\-4 & 1 & 2 & 1\\2 & -2 & 1 & 1\\2 & 4 & -2 & 9\end{bmatrix}$, 試問: (1) $\det(A)=?$ (2) $A^{-1}=?$

3. $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\1 & 4 & -2\\1 & 4 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$, 請使用 Gram-Schmidt 法針對行向量空間求出一組單位正交基底向量。

4. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\2 & 1 & -3\\4 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}4\\-2\\6\end{Bmatrix}$, 請解出 $\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=?$

5. 對如下矩陣 A 與向量 b 試解方程組 $Ax=b$。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 2\\2 & 6 & 4 & 8\\0 & 0 & 2 & 4\end{bmatrix} \quad \& \quad b=\begin{Bmatrix}1\\3\\1\end{Bmatrix}$$

6. 已知在 R^3 之映射 $T(x)=[2x_1+x_2 \quad x_2-x_3 \quad 2x_2+4x_3]^T$ 試求 T 之特徵值與特徵向量。

7. 試問以下矩陣 A、B 之特徵值與特徵向量。

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 4 & 2\\0 & 1 & -2 & 4\\2 & 4 & -1 & -2\\0 & 2 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

8. 對於如下矩陣 A，已知 $t(A)=6$ 與 $\det(A)=-30$，試問 A 之特徵值。

$$A=\begin{bmatrix}a & -2.6 & b\\c & d & 1.7\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

參考解答:

1. (1) $\det(A) = -9$

(2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

2. (1) $\det(A) = 15$

(2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{82}{15} & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & -\frac{37}{15} \\ \frac{28}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{13}{5} \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $u_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ $\quad u_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$

$u_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T$

4. $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

5. $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} + s \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + t \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

6. 特徵值 $\lambda = 3, 2, 2$

$\lambda_1 = 3 \Rightarrow \quad x^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \Rightarrow \quad x^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ (只有一個)

7. A 之特徵值 $\lambda=-1,-1,1,1$

A 之特徵向量:

$$\lambda_1=\lambda_2=-1 \;\Rightarrow\; x^1, x^2=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{Bmatrix},\quad \lambda_3=\lambda_4=1 \;\Rightarrow\; x^3, x^4=\begin{Bmatrix}0\\1\\1\\0\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\1\end{Bmatrix}$$

B 之特徵值 $\lambda=-1,-5,3,3$

B 之特徵向量:

$$\lambda_1=-1 \;\Rightarrow\; x^1=\begin{Bmatrix}3\\-1\\1\\1\end{Bmatrix},\quad \lambda_2=-5 \;\Rightarrow\; x^2=\begin{Bmatrix}-11\\1\\5\\1\end{Bmatrix},\quad \lambda_3=\lambda_4=3 \;\Rightarrow\; x^3=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix}$$

8. $\lambda=3,-2,5$