

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 若已知一 2 階 ODE

$$ax^2y''(x) + bxy'(x) + cy(x) = -3x^2 - 8x - 3$$

且滿足 $y'(1) = y(1) = 0$ 與其特解 $y_p(x) = x^2 + 2x + 1$

- (1) 請問 a, b, c 分別為何? (6%)
- (2) 請問兩個補解 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 為何? (6%)
- (3) 請問全解 $y(x)$ 為何? (2%)

2. 考慮下述三條微分方程式

$$(a) y''(t) - 3y'(t) - 3y(t) = 0 \quad (b) y''(t) + 4y(t) = 0 \quad (c) y''(t) + 8y'(t) + 15y(t) = 0$$

試問: (1) 當 $t \rightarrow \infty$, 何者會產生週期性振動的解? (4%)

(2) 當 $t \rightarrow \infty$, 何者的解會衰減到零? (4%)

(3) 當 $t \rightarrow \infty$, 何者會產生無窮大的解? (4%)

3. 已知二階 ODE

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = e^{2x}$$

- (1) 試以待定係數法(Undetermined coefficient method)求特解。 (8%)
- (2) 試以參數變異法(Variation parameter method)求特解。 (8%)

4. 試求微分方程式 $x^2y'' + 5xy' + 4y = \frac{2\ln x}{x^2}$ 之通解。 (10%)

5. 試求: (1) $(3x + 2)^2 y'' + (9x + 6)y' - 36y = 27x + 9$ (8%)

(2) $x(1-x)y'' + 2(1-2x)y' - 2y = 0$ (8%)

(3) $y'' + e^{3y}(y')^3 = 0$ (7%)

6. (1) 試求微分方程 $y''(t) + 9\omega_0^2 y(t) = \cos(3\omega t)$ 之兩補解 $y_1(t)$ 與 $y_2(t)$ 與其

Wronskian, 即 $W(y_1, y_2) = ?$ 。 (5%)

(2) 當 $\omega \neq \omega_0$ 時, 此微分方程之特解為何? (5%)

(3) 當 $\omega = \omega_0$ 時, 此微分方程之特解為何? (5%)

7. 已知 $y(x) = e^{ax}$ 為方程式 $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = xe^x$ 之一補解

(1) 試問: $a = ?$ (2%)

(2) 試求此方程式之通解。 (8%)