

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，試問 $\det(A)$ 為何? (7%)

2. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & -6 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & c & d \end{bmatrix}$ ，已知 $\text{trace}(A) = 1$ 與 $\det(A) = -40$ ，試問 A 之特徵值。
(9%)

3. 給一矩陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ，試問：

(1) $\det(A) = ?$ (3%) (2) $A^{-1} = ?$ (3%) (3) 矩陣 A 為何種矩陣? (2%)

4. 已知 $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，試求：

(1) $\det(A^T) = ?$ (2) $\det(3B^{-1}) = ?$ (3) $\det(AB) = ?$ (4) $(AB)^{-1} = ?$ (12%)

5. 已知向量集 $\{x^1, x^2, x^3\}$ ，其中 $x^1 = [1 \ 1 \ 0]^T$ ， $x^2 = [2 \ 0 \ 1]^T$ ， $x^3 = [2 \ 2 \ 1]^T$ ，試以 Gram-Schmidt 法找出其正交單位集合 $\{u^1, u^2, u^3\}$ ，並利用此集合來表示 $u = [2 \ -5 \ 6]^T$ ，即 $u = au^1 + bu^2 + cu^3$ 。(12%)

6. 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -7 & -2 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ ，試問：

- (1) A 的特徵方程為何? (3%)
- (2) 若 $A^{-1} = pA^2 + qA + rI$ ，則 $p = ?$ ， $q = ?$ ， $r = ?$ $A^{-1} = ?$ (8%)
- (3) 試以 Cayley-Hamilton 法計算 e^A 。(6%)
- (4) 試將化為 Jordan form，即 $A = PJP^{-1}$ (5%)
- (5) 若 $A^{-1} = P\bar{J}P^{-1}$ ，則 $\bar{J} = ?$ (5%)
- (6) 試以 Jordan form 法計算 e^A 。(5%)

7. 給方程式 $-11x_1^2 + 84x_1x_2 + 24x_2^2 = 156$ ，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2]$ ，試問其轉換矩陣為何? (5%) 判斷此方程代表何種圓錐曲線? (3%)
 $Q = -11x_1^2 + 84x_1x_2 + 24x_2^2$ 為何種型式二次式 (正定、負定或是不定型)? (2%)

8. 試解: $\frac{dx}{dt} = Ax + z$ 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $z = \begin{Bmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{Bmatrix}$ 。 (10%)