國立臺灣海洋大學河海工程學系 2021 工程數學(二) 第一次大考參考解答

系級：____________ 學號：____________ 姓名：____________

1. 通過 $(1,0,0)$ 、$(0,1,0)$ 與 $(0,0,1)$ 三點之空間平面方程式為何?與通過二點 $(0,0,0)$ 、$(1,1,2)$ 空間直線之交角為何? (8%)

2. 給定 $f(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)$

   (1) 試求 f 在點 $(0,\frac{\pi}{2})$ 其最大變化率方向。 (5%)

   (2) 試求 f 在點 $(0,\frac{\pi}{2})$ 其 50%最大變化率方向。(5%)

3. 給一腎臟線 $\vec{r}(t)=a(3\cos t-\cos 3t)\vec{i}+a(3\sin t-\sin 3t)\vec{j}$ ，其中 $0\le t\le 2\pi$

   (1) 試計算腎臟線之周長。 (6%)

   (2) 試以格林定理: $\oint fdx+gdy=\iint(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy$ ，給定 $f=-y$ 與 $g=x$ 來求腎臟線之面積。 (6%)

   (3) 試求在點 $(0,4a)$ 之曲率 κ 。 (6%)

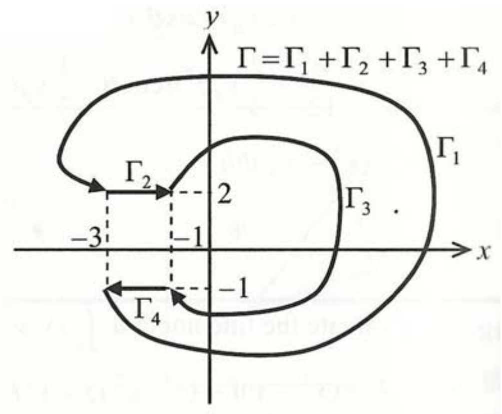
4. 給一封閉曲線 Γ 如圖一，若有一向量場 $\vec{F}=(y^5-y^3)\vec{i}+(5xy^4-4y-3xy^2)\vec{j}$

   (1) 試求: $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ (6%)

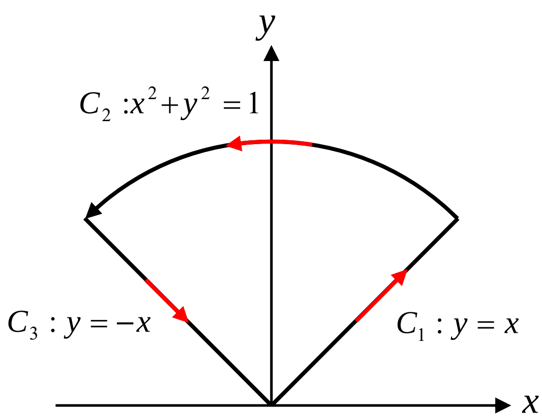
   (2) 若已知 $\int_{\Gamma_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}=10$ ，試問: $\int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ (6%)

5. 給一力 $\vec{F}=(-16y+\sin x^2)\vec{i}+(4e^y+3x^2)\vec{j}$ ，試求其沿一封閉路徑 C

   ($C=C_1+C_2+C_3$ ，如圖二)所作之功 $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 為何? (10%)



圖一



圖二

6. 考慮一個圓柱體 $D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 4, -1\le z\le 1\}$，設 S 代表 D 之表面，向量場 $\vec{F}=xz\,\vec{i}+yx^2\,\vec{j}+zy^2\,\vec{k}$，其中 $\vec{n}$ 代表 S 上的向外法向量，試驗證散度定理。

(1) 直接以體積分計算。(7%)　　(2) 直接以面積分計算。(7%)

7. 已知場 $\vec{F}=-y\,\vec{i}+x\,\vec{j}-xyz\,\vec{k}$ 及曲面 $S_1 : z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 3)$ 與 $S_2 : z=3$，Γ 為 S_1、S_2 之交線，試問:

(1) 試畫出 S_1 之圖形，並標出 S_1、S_2 與 Γ。(4%)

(2) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。(4%)

(3) S_1 上的單位法向量 $\vec{n}=$? (4%)

(4) $\oiint (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS=$? (4%)

(5) $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=$? (4%)

(6) $\iint_{S_1} (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=$? (4%)

(7) $\iint_{S_2} (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=$? (4%)

Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla\cdot\vec{F}\,dV=\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$ **(3D)**　　$\iint \nabla\cdot\vec{F}\,dA=\oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ **(2D)**

格林定理: $\int P\,dx+Q\,dy=\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$

曲率: $\kappa=\frac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$　　**扭率:** $\tau=\left|\frac{d(\vec{T}(s)\times\vec{N}(s))}{ds}\right|$

二倍角公式: $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$

圓球體積: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$　**圓球表面積:** $S=4\pi r^2$

$z=f(x,y)$　　$\vec{r}(x,y)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\vec{k}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+f(x,y)\vec{k}$

$dA=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right|dxdy=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dxdy$

參考解答:

1. **通過** $(1,0,0)$ **、** $(0,1,0)$ **與** $(0,0,1)$ **三點之空間平面方程式為何?與通過二點** $(0,0,0)$ **、** $(1,1,2)$ **空間直線之交角為何? (8%)**

平面方程式: $x+y+z=1$

直線方程式: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$

$$\cos\theta=\frac{1+1+2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}$$

2. **給定** $f(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)$

(1) **試求** f **在點** $(0,\frac{\pi}{2})$ **其最大變化率方向。 (5%)**

(2) **試求** f **在點** $(0,\frac{\pi}{2})$ **其 50%最大變化率方向。(5%)**

(1) $$\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j})=[ye^{xy}\sin(x+y)+e^{xy}\cos(x+y)]\vec{i}+[xe^{xy}\sin(x+y)+e^{xy}\cos(x+y)]\vec{j}$$

在點 $(0,\frac{\pi}{2})$ $\Rightarrow \nabla f=\frac{\pi}{2}\vec{i}$

最大變化率方向即沿著 $\vec{i}$ 之方向

(2) 50%最大變化率即 $\nabla f\cdot\vec{u}=\frac{\pi}{4}$ 又 $\vec{u}=p\vec{i}+q\vec{j}$ 並且可知 $p^2+q^2=1$

$\therefore$ 可得 $p=\frac{1}{2},\ q=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

故 50%最大變化率方向即 $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

3. 給一腎臟線 $\vec{r}(t)=a(3\cos t-\cos 3t)\vec{i}+a(3\sin t-\sin 3t)\vec{j}$ ，其中 $0\le t\le 2\pi$

(1) 試計算腎臟線之周長。 **(6%)**

(2) 試以格林定理: $\oint f dx+g dy=\iint (\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy$ ，給定 $f=-y$ 與 $g=x$ 來求腎臟線之面積。 **(6%)**

(3) 試求在點 $(0,4a)$ 之曲率 κ 。 **(6%)**

(1) $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}=\rho(t)\cos t\,\vec{i}+\rho(t)\sin t\,\vec{j}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=a(3\cos t-\cos 3t) \\ y=a(3\sin t-\sin 3t) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3a(-\sin t+\sin 3t) \\ \dfrac{dy}{dt}=3a(\cos t-\cos 3t) \end{cases}$$

$$S=\int ds=\int |d\vec{r}|=\int \sqrt{dx^2+dy^2}=\int \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\;dt$$

$$=6a\int_0^\pi \sqrt{(-\sin t+\sin 3t)^2+(\cos t-\cos 3t)^2}\;dt$$

$$=6a\int_0^\pi \sqrt{2-2\sin t\cdot\sin 3t-2\cos t\cdot\cos 3t}\;dt$$

$$=6a\int_0^\pi \sqrt{2-2\cos(3t-t)}\;dt$$

$$=6\sqrt{2}\,a\int_0^\pi \sqrt{1-\cos 2t}\;dt$$

$$=12a\int_0^\pi \sin t\;dt$$

$$=-12a\cdot\cos t\Big|_0^\pi$$

$$=24a$$

(2) $\oint -y dx+x dy=2\iint dxdy=2A$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\oint -y dx+x dy$$

$$=3a^2\int_0^\pi [(3\sin t-\sin 3t)(\sin t-\sin 3t)+(3\cos t-\cos 3t)(\cos t-\cos 3t)]dt$$

$$=12a^2\int_0^\pi (1-\cos 2t)\,dt$$

$$=12\pi a^2$$

(3) $\kappa = \dfrac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$

$\vec{r}'(t) = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$\vec{r}''(t) = x''\vec{i} + y''\vec{j}$

$$\kappa = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$x = a(3\cos t - \cos 3t) \quad \Rightarrow x' = \dfrac{dx}{dt} = 3a(-\sin t + \sin 3t)$

$\Rightarrow x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2} = 3a(-\cos t + 3\cos 3t)$

$y = a(3\sin t - \sin 3t) \quad \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dt} = 3a(\cos t - \cos 3t)$

$\Rightarrow y'' = \dfrac{d^2y}{dt^2} = 3a(-\sin t + 3\sin 3t)$

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{36a^2(1-\cos 2t)}{27a^3[2(1-\cos 2t)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3\sqrt{2}\,a \cdot \sqrt{(1-\cos 2t)}} = \frac{1}{3a \cdot \sin t}$$

將點 $(0, 4a)$ 即 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 代入，可得 $\kappa = \dfrac{1}{3a}$

4. 給一封閉曲線Γ如圖一，若有一向量場 $\vec{F} = (y^5 - y^3)\vec{i} + (5xy^4 - 4y - 3xy^2)\vec{j}$

(1) 試求: $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ **(6%)**

(2) 若已知 $\int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 10$ **，試問:** $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ **(6%)**

(1) $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^5 - y^3 & 5xy^4 - 4y - 3xy^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

可知此為保守場又此為積分路徑為封閉路徑

$\therefore \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

(2) $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -(\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r})$

Γ_2: $y = 2 \quad \Rightarrow dy = 0$ 　並且　 $x = -3 \to -1$

$$\int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{-3}^{-1}(y^5 - y^3)dx = \int_{-3}^{-1} 24\,dx = 48$$

Γ_4： $y = -1 \quad \Rightarrow dy = 0$ 　並且　 $x = -1 \rightarrow -3$

$$\int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{-3}(y^5 - y^3)dx = 0$$

$$\therefore \int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -(\int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_4} \vec{F}\cdot d\vec{r}) = -(48+10+0) = -58$$

5. 給一力 $\vec{F} = (-16y + \sin x^2)\vec{i} + (4e^y + 3x^2)\vec{j}$ ，試求其沿一封閉路徑 C

($C = C_1 + C_2 + C_3$ ，如圖二)所作之功 $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 為何? (10%)

$\because$ 存在 $\sin x^2$

$\therefore$ 直接由路徑積分計算甚為複雜

故可利用平面格林定理(或 Stokes 定理)計算

平面格林定理: $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int P\,dx + Q\,dy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$

$$= \iint [\frac{\partial(4e^y + 3x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-16y + \sin x^2)}{\partial y}]\,dxdy$$

$$= \iint (6x + 16)\,dxdy$$

又此為扇形，可轉換成極座標計算

令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $dxdy = rdrd\theta$

$$\iint (6x+16)\,dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 (6r\cos\theta + 16) rdrd\theta = 4\pi$$

若由 Stokes 定理

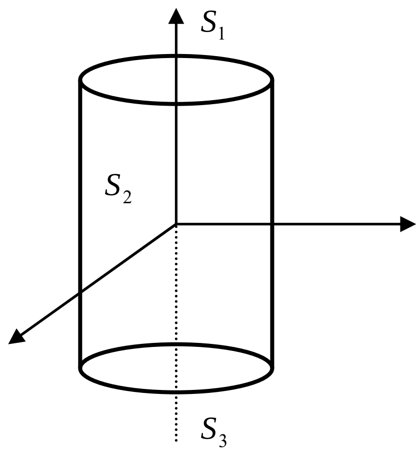
$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA = \iint (6x+16)\vec{k}\cdot\vec{k}\,dA = \iint (6x+16)\,dA$$

結果同格林定理

6. 考慮一個圓柱體 $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le 4, -1 \le z \le 1\}$ ，設 S 代表 D 之表面，向量場 $\vec{F} = xz\,\vec{i} + yx^2\,\vec{j} + zy^2\,\vec{k}$ ，其中 $\vec{n}$ 代表 S 上的向外法向量，試驗證散度定理。

(1) 直接以體積分計算。(7%)　　(2) 直接以面積分計算。(7%)

(1) $\nabla\cdot\vec{F}=\dfrac{\partial(xz)}{\partial x}+\dfrac{\partial(yx^2)}{\partial y}+\dfrac{\partial(zy^2)}{\partial z}=z+x^2+y^2$



$$\iiint\nabla\cdot\vec{F}\,dV=\iiint(z+x^2+y^2)\,dV$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-1}^1(z+r^2)\,rdzdrd\theta$$

$$=16\pi$$

(2) $\oiint\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA=\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA+\iint_{S_3}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$

S_1: $z=1$，$\vec{n}=\vec{k}$ $\Rightarrow\vec{F}\cdot\vec{n}=y^2$

S_3: $z=-1$，$\vec{n}=-\vec{k}$ $\Rightarrow\vec{F}\cdot\vec{n}=y^2$

$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA=\iint_{S_3}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^2(r\sin\theta)^2\,rdrd\theta=4\pi$$

S_2: $x=2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$，$\vec{n}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$，$dA=2dzd\theta$

$$\vec{F}\cdot\vec{n}=xz\cos\theta+yx^2\sin\theta$$

$$\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^2(2z\cos^2\theta+8\cos^2\theta\sin\theta)2dzd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}(8\sin^2\theta+32\cos^2\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=8\pi$$

$$\therefore\oiint\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA=\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA+\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA+\iint_{S_3}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA=16\pi$$

7. 已知場 $\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j}-xyz\vec{k}$ **及曲面** $S_1: z=\sqrt{x^2+y^2}$ **(**$0\le z\le 3$**) 與** $S_2: z=3$ **，**Γ**為**S_1**、**S_2**之交線，試問:**

(1) 試畫出S_1**之圖形，並標出**S_1**、**S_2**與**Γ**。 (4%)**

(2) $\vec{F}$ **是否為保守場? 請說明之。 (4%)**

(3) S$_1$ **上的單位法向量** $\vec{n}=?$ **(4%)**

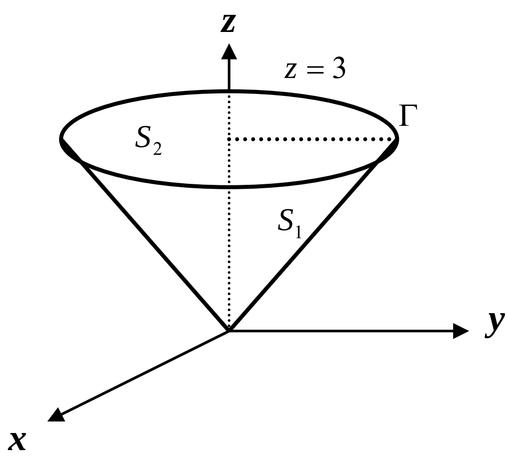
(4) $\oiint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS=?$ **(4%)**

(5) $\int_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ **(4%)**

(6) $\iint_{S_1}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ **(4%)**

(7) $\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = ?$ **(4%)**

(1)



(2) $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & -xyz \end{vmatrix} = -xz\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$

$\because \ \nabla \times \vec{F} \neq 0$

$\therefore \ \vec{F}$ 不是保守場

(3) 令 $\phi = x^2 + y^2 - z^2$

$$\vec{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}}{\sqrt{2}\,z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} - \vec{k}\right)$$

(4) Gauss 散度定理: $\oiint \vec{P} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint \nabla \cdot \vec{P}\, dV$

令 $\vec{P} = \nabla \times \vec{F}$

可知 $\nabla \cdot \vec{P} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ (∵任何旋轉場不會有發散性)

因此 $\oiint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = 0$

(5) 由線積分 $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma -y\,dx + x\,dy - xyz\,dz$

令 $x = 3\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$, $z = 3$

$\Rightarrow dx = -3\sin\theta\, d\theta$, $dy = 3\cos\theta\, d\theta$, $dz = 0$

$$\therefore \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} -y\,dx + x\,dy - xyz\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} [-3\sin\theta \cdot (-3\sin\theta) + 3\cos\theta \cdot (3\cos\theta)]d\theta = 18\pi$$

(6) $\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -18\pi$

(7) $\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = -\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 18\pi$