國立臺灣海洋大學河海工程學系 2021 工程數學(二) 第一次大考

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 通過 $(1,0,0)$ 、$(0,1,0)$ 與 $(0,0,1)$ 三點之空間平面方程式為何?與通過二點 $(0,0,0)$ 、$(1,1,2)$ 空間直線之交角為何? (8%)

2. 給定 $f(x,y)=e^{xy}\sin(x+y)$

   (1) 試求 f 在點 $(0,\frac{\pi}{2})$ 其最大變化率方向。 (5%)

   (2) 試求 f 在點 $(0,\frac{\pi}{2})$ 其 50%最大變化率方向。(5%)

3. 給一腎臟線 $\vec{r}(t)=a(3\cos t-\cos 3t)\vec{i}+a(3\sin t-\sin 3t)\vec{j}$ ，其中 $0\le t\le 2\pi$

   (1) 試計算腎臟線之周長。 (6%)

   (2) 試以格林定理: $\oint fdx+gdy=\iint(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy$ ，給定 $f=-y$ 與 $g=x$ 來求腎臟線之面積。 (6%)

   (3) 試求在點 $(0,4a)$ 之曲率 κ 。 (6%)

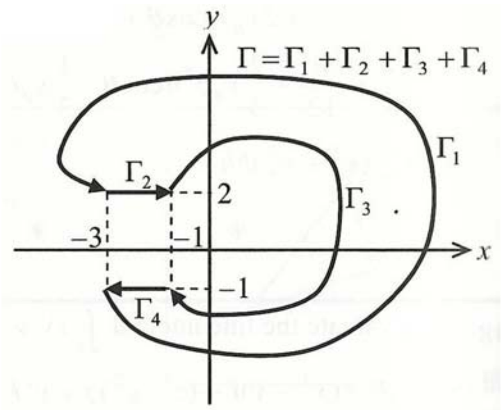
4. 給一封閉曲線 Γ 如圖一，若有一向量場 $\vec{F}=(y^5-y^3)\vec{i}+(5xy^4-4y-3xy^2)\vec{j}$

   (1) 試求: $\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ (6%)

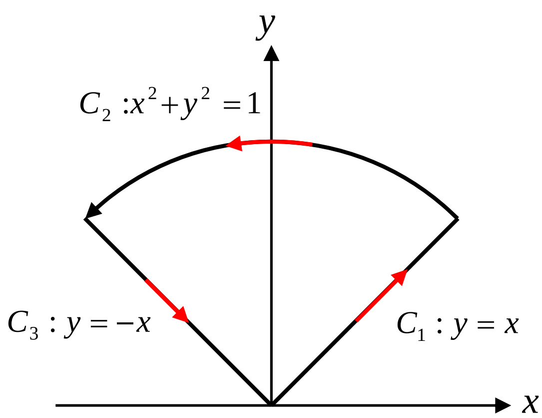
   (2) 若已知 $\int_{\Gamma_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}=10$ ，試問: $\int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ (6%)

5. 給一力 $\vec{F}=(-16y+\sin x^2)\vec{i}+(4e^y+3x^2)\vec{j}$ ，試求其沿一封閉路徑 C

   ($C=C_1+C_2+C_3$ ，如圖二)所作之功 $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$ 為何? (10%)



圖一



圖二

6. 考慮一個圓柱體 $D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 4,-1\le z\le 1\}$，設 S 代表 D 之表面，向量場 $\vec{F}=xz\,\vec{i}+yx^2\,\vec{j}+zy^2\,\vec{k}$，其中 $\vec{n}$ 代表 S 上的向外法向量，試驗證散度定理。

(1) 直接以體積分計算。(7%) (2) 直接以面積分計算。(7%)

7. 已知場 $\vec{F}=-y\,\vec{i}+x\,\vec{j}-xyz\,\vec{k}$ 及曲面 $S_1: z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 3)$ 與 $S_2: z=3$，Γ 為 S_1、S_2 之交線，試問:

(1) 試畫出 S_1 之圖形，並標出 S_1、S_2 與 Γ。 (4%)

(2) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (4%)

(3) S_1 上的單位法向量 $\vec{n}=?$ (4%)

(4) $\oiint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS=?$ (4%)

(5) $\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ (4%)

(6) $\iint_{S_1}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ (4%)

(7) $\iint_{S_2}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ (4%)

Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint\nabla\cdot\vec{F}\,dV=\oiint\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$ **(3D)** $\iint\nabla\cdot\vec{F}\,dA=\oint\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ **(2D)**

格林定理: $\int P\,dx+Q\,dy=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\oint\vec{F}\cdot d\vec{r}$

曲率: $\kappa=\dfrac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率:** $\tau=\left|\dfrac{d(\vec{T}(s)\times\vec{N}(s))}{ds}\right|$

二倍角公式: $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$**,** $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

圓球體積: $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ **圓球表面積:** $S=4\pi r^2$

$z=f(x,y)$ $\vec{r}(x,y)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\vec{k}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+f(x,y)\vec{k}$

$dA=\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right|dxdy=\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dxdy$