國立臺灣海洋大學河海工程學系 2021 工程數學(二) 期末考參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

考試方式： Open book

注意事項：

1. 請使用A4 白紙作答，並於每一頁上方標明 **班別**、**學號**、**姓名**與**頁碼**（例如：P.1, P.2, ...）
2. 作答完畢後，請拍照或掃描試卷，並使用學校電子信箱發 e-mail 到 ytlee@mail.ntou.edu.tw。請保留信件內容，已防止如果沒收到你們的 email 時，可由寄件備份再次轉發郵件以當證明。
3. 請自己作答，禁止與他人討論。

1. 給 $(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda+1)y = 0$ ，$y(0) = y(\pi) = 0$，試求其特徵值與特徵函數。(10%)

2. 試問下述函數是否為週期函數? 若為週期函數，須寫出其週期為何? (10%)
   (1) $3\sin t + 2\sin 3t$ (2) $2 + 5\sin 4t + 4\cos 7t$ (3) $2\sin 3t + 7\cos \pi t$
   (4) $7\cos \pi t + 5\sin 2\pi t$ (5) $\sin \frac{5}{2}t + 3\cos \frac{6}{5}t + 3\sin(\frac{t}{7} + 30^\circ)$

3. 給一週期函數 $f(x) = (x-1)^2$, $0 \le x \le 2$ 且 $f(x) = f(x+2)$
   (1) 試畫出此函數之圖形。 (2%)
   (2) 試求其傅立葉級數展開。 (5%)
   (3) 由(2)之結果試求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = ?$ (3%)

4. 若函數 $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$, $a > 0$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega) = (\frac{\pi}{a})e^{-a|\omega|}$ ，
   試問: 函數 $g(t) = \frac{t}{(a^2+t^2)^2}$, $a > 0$ 的傅立葉轉換 $G(\omega)$ 為何? (10%)

5. 給一函數 $f(t) = \begin{cases} 1 - \left|\frac{t}{2}\right|, & |t| \le 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$
   (1) 試求其傅立葉轉換 $F(\omega)$ 為何? (6%)
   (2) 試計算 $\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\sin t}{t})^4 dt = ?$ (4%)

6. 已知 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ 以及函數 $g(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_2 t}$ ，試問 $f(t) * g(t)$ 為何? (10%)

7. 試求函數 $F(\omega)=\dfrac{5}{2-\omega^2+3i\omega}$ 之傅立葉反轉換 $f(x)$ 。(20%)

8. 試求:

(1) $\mathcal{L}[e^{at}\dfrac{\sinh t}{t}]$ (7%) (2) $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s+8}{s^2+4s+20}]$ (7%) (3) $\mathcal{L}^{-1}[\dfrac{s+1}{s^2(s^2+16)}]$ (7%)

9. 考慮一初始值問題 $x''(t)+p_0x'(t)+q_0x(t)=f(t)$，$t\geq 0$ 並且 $x(0)=x'(0)=0$

(1) 試求 p_0 與 q_0 使得其解 $x(t)$ 可被表示為

$$x(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)f(\tau)d\tau,\ t\geq 0 \quad (6\%)$$

(2) 試求 $x(t)$ 當 $f(t)=e^{-t}\cos t$ (6%)

(3) 試求: $x(t)$ 當 $p_0=2$，$q_0=1$ 與 $f(t)=e^{-t}$ (5%)

10. 試以拉普拉斯轉換求解下述微分方程式

$$ty''+(1-3t)y'-3y=0,\ y(0)=1 \qquad (12\%)$$

11. 試求解下述聯立微分方程組 (20%)

$$\begin{cases} y_1''=2y_1+y_2+y_1'+y_2' \\ y_2''=-5y_1+2y_2+5y_1'-y_2' \end{cases} \quad \text{且} \quad y_1(0)=y_2(0)=y_1'(0)=4 \quad \text{與} \quad y_2'(0)=-4$$

12. 對工數的遠距教學有何感想? (5%) 對遠距教學上課方式有何建議? (5%)
(請各別作答)

參考解答：

1. 給 $(e^{2x}y')'+e^{2x}(\lambda+1)y=0$，$y(0)=y(\pi)=0$，**試求其特徵值與特徵函數。(10%)**

$(e^{2x}y')'+e^{2x}(\lambda+1)y=0 \quad \Rightarrow y''+2y'+(\lambda+1)y=0$

令 $y=e^{mx}$ 帶入 ODE 可得 $[m^2+2m+(\lambda+1)]e^{mx}=0 \quad \Rightarrow m^2+2m+(\lambda+1)=0$

$\Rightarrow m=-1\pm\sqrt{-\lambda}$

(a) 令 $\lambda=-k^2 \quad \Rightarrow y(x)=e^{-x}(c_1\cosh kx+c_2\sinh kx)$

由 $y(0)=0 \;\Rightarrow c_1=0$

$y(\pi)=0 \;\Rightarrow c_2=0$

(b) 令 $\lambda=0 \quad \Rightarrow y(x)=e^{-x}(c_1+c_2x)$

由 $y(0)=0 \;\Rightarrow c_1=0$

$y(\pi)=0 \;\Rightarrow c_2=0$

(c) 令 $\lambda=k^2 \quad \Rightarrow y(x)=e^{-x}(c_1\cos kx+c_2\sin kx)$

由 $y(0)=0 \;\Rightarrow c_1=0$

$y(\pi)=0 \;\Rightarrow c_2e^{-\pi}\sin k\pi=0$

$\therefore$ 可知其為 $\sin k\pi=0 \;\Rightarrow k=n \;\; (n=1,2,3,\cdots\cdots)$

故特徵值為 $\lambda_n=n^2$

特徵函數為 $y_n(x)=e^{-x}\sin nx \;\; (n=1,2,3,\cdots\cdots)$

2. 試問下述函數是否為週期函數? 若為週期函數，須寫出其週期為何? (10%)

(1) $3\sin t+2\sin 3t$ **(2)** $2+5\sin 4t+4\cos 7t$ **(3)** $2\sin 3t+7\cos \pi t$

(4) $7\cos \pi t+5\sin 2\pi t$ **(5)** $\sin\frac{5}{2}t+3\cos\frac{6}{5}t+3\sin(\frac{t}{7}+30^\circ)$

(1)
$\sin t\to 2\pi, 4\pi, 6\pi, \cdots$
$\sin 3t\to \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}, \cdots$ 共同週期為 2π

$\therefore$ $3\sin t+2\sin 3t$ 為週期函數，週期為 2π

(2)
$\sin 4t\to \frac{2\pi}{4}, \frac{4\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \cdots$
$\sin 3t\to \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \cdots$ 共同週期為 2π

$\therefore$ $2+5\sin 4t+4\cos 7t$ 為週期函數，週期為 2π (常數 2 為平移項)

(3) $\sin 3t \to \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}, \cdots$ 找不到共同週期

$\cos \pi t \to 2, 4, 6, 8, 10, \cdots$

$\therefore\ \ 2\sin 3t + 7\cos \pi t$ 為非週期函數

(4) $\cos \pi t \to 2, 4, 6, 8, 10, \cdots$ 共同週期為 2

$\sin 2\pi t \to 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$

$\therefore\ \ 7\cos \pi t + 5\sin 2\pi t$ 為週期函數，週期為 2

(5) $\sin \frac{5}{2}t \to \frac{4\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}, \frac{12\pi}{5}, \cdots$

$\cos \frac{6}{5}t \to \frac{5\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{15\pi}{3}, \cdots$ 共同週期為140π

$\sin(\frac{t}{7} + 30°) \to 14\pi, 28\pi, 42\pi, \cdots$

$\therefore\ \ \sin \frac{5}{2}t + 3\cos \frac{6}{5}t + 3\sin(\frac{t}{7} + 30°)$ 為週期函數，週期為140π

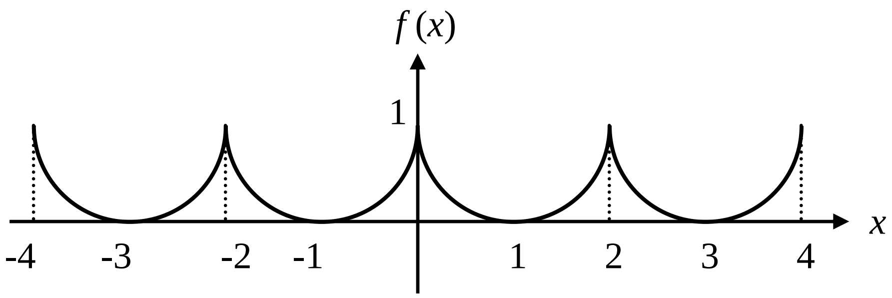
3. 給一週期函數 $f(x) = (x-1)^2$， $0 \le x \le 2$ 且 $f(x) = f(x+2)$

(1) 試畫出此函數之圖形。 (2%)

(2) 試求其傅立葉級數展開。 (5%)

(3) 由(2)之結果試求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = ?$ (3%)

(1)



(2) 由圖可看出此為偶函數

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T}$$

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos \frac{2n\pi x}{T}\,dx = 2\int_0^1 (x-1)^2 \cos n\pi x\,dx$$

$$= 2[\frac{-2}{n^3\pi^3}\sin n\pi x + \frac{2(x-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x + \frac{(x-1)^2}{n\pi}\sin n\pi x]\Big|_0^1 = \frac{4}{n^2\pi^2}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

(3) 由 Parseval 定理: $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(x)\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

可得 $\frac{1}{2}\int_0^2 (x-1)^4\,dx = (\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{n^2\pi^2})^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n^4\pi^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

4. 若函數 $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$， $a > 0$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega) = (\frac{\pi}{a})e^{-a|\omega|}$，

試問:函數 $g(t) = \frac{t}{(a^2+t^2)^2}$， $a > 0$ 的傅立葉轉換 $G(\omega)$ 為何? (10%)

由 $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ $\Rightarrow f'(t) = \frac{-2t}{(a^2+t^2)^2} = -2g(t)$ $\Rightarrow g(t) = -\frac{1}{2}f'(t)$

$\therefore$ $F(\omega) = (\frac{\pi}{a})e^{-a|\omega|}$ $\Rightarrow G(\omega) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}[f'(t)] = -\frac{i\omega}{2}F(\omega) = -\frac{i\pi\omega}{2a}e^{-a|\omega|}$

5. 給一函數 $f(t) = \begin{cases} 1-\left|\frac{t}{2}\right|, & |t| \le 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$

(1) 試求其傅立葉轉換 $F(\omega)$ 為何? (6%)

(2) 試計算 $\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin t}{t})^4 dt = ?$ (4%)

(1) $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

$$= \int_{-2}^{2}(1-\left|\frac{x}{2}\right|)e^{-i\omega x}\,dx$$

$$= 2\int_0^2 (1-\frac{x}{2})\cos\omega x\,dx$$

$$= 2[(1-\frac{x}{2})\frac{1}{\omega}\sin\omega x - \frac{1}{2}\frac{1}{\omega^2}\cos\omega x]\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{\omega^2}(1-\cos 2\omega)$$

$$=\frac{2\sin^2\omega}{\omega^2}$$

(2) 由 Parseval 定理: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2 dx$

可得 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2\sin^2\omega}{\omega^2}\right|^2 d\omega=2\int_0^2(1-\frac{x}{2})^2 dx=\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin^4\omega}{\omega^4})^2 d\omega=\frac{2\pi}{3}$$

6. 已知 $\mathcal{F}[f(t)]=F(\omega)$ 以及函數 $g(t)=e^{i\omega_1 t}+e^{-i\omega_2 t}$ ，試問 $f(t)*g(t)$ 為何? (10%)

$$G(\omega)=\mathcal{F}[G(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{i\omega_1 t}+e^{-i\omega_2 t})e^{-i\omega t}\,dt$$

$$=2\pi[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2)]$$

又 $y(t)=f(t)*g(t)$ $\Rightarrow Y(\omega)=\mathcal{F}[y(t)]=\mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega)$

$$=2\pi F(\omega)[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2)]$$

$$\Rightarrow y(t)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_2)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$=F(\omega_1)e^{i\omega_1 t}+F(-\omega_2)e^{-i\omega_2 t}$$

7. 試求函數 $F(\omega)=\frac{5}{2-\omega^2+3i\omega}$ 之傅立葉反轉換 $f(x)$ 。(20%)

取傅立葉反轉換可得 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{5}{2-\omega^2+3i\omega}]$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{5}{\omega^2-3i\omega-2}e^{i\omega x}\,d\omega$$

$$=-\frac{5}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega x}}{(\omega-i)\cdot(\omega-2i)}\,d\omega$$

極點(pole)在 $\omega=i$ 及 $\omega=2i$ 且留數為

$$R(i)=\left.\frac{e^{i\omega x}}{2\omega-3i}\right|_{\omega=i}=-\frac{e^{-x}}{i}=ie^{-x}$$

$$R(2i)=\left.\frac{e^{i\omega t}}{2\omega-3i}\right|_{\omega=2i}=\frac{e^{-2x}}{i}=-ie^{-2x}$$

應用 Jordan's Lemma 可知在 $x>0$ 有

$$f(x)=-\frac{5}{2\pi}\cdot 2\pi i\cdot(ie^{-x}-ie^{-2x})=5(e^{-x}-e^{-2x})$$

對於 $x<0$ ，因沒有不解析點，故知 $f(x)=0$

$\therefore\quad y(x)=5(e^{-x}-e^{-2x})\cdot u(x)$

8. 試求:

(1) $\mathcal{L}[e^{at}\frac{\sinh t}{t}]$ **(7%)** **(2)** $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+8}{s^2+4s+20}]$ **(7%)** **(3)** $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{s^2(s^2+16)}]$ **(7%)**

(1) $\mathcal{L}[\sinh t]=\frac{1}{s^2-1}$

$$\mathcal{L}[\frac{\sinh t}{t}]=\int_s^\infty\frac{1}{\tau^2-1}d\tau=\frac{1}{2}\int_s^\infty(\frac{1}{\tau-1}-\frac{1}{\tau+1})d\tau=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{s-1}{s+1}\right|$$

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)\quad\Rightarrow\mathcal{L}[e^{at}\frac{\sinh t}{t}]=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{s-a-1}{s-a+1}\right|$$

(2) $$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+8}{s^2+4s+20}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+8}{(s+2)^2+16}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+2}{(s+2)^2+4^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{(s+2)^2+4^2}]$$

$$=e^{-2t}\cdot\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+4^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{s^2+4^2}]$$

$$=e^{-2t}(\cos 4t+\frac{3}{2}\sin 4t)$$

(3) $$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{s^2+16}]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+4^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{s^2+4^2}]=\cos 4t+\frac{1}{4}\sin 4t$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{s^2(s^2+16)}]=\int_0^t\int_0^\xi(\cos 4\tau+\frac{1}{4}\sin 4\tau)\,d\tau\,d\xi$$

$$=\int_0^t(\frac{1}{4}\sin 4\tau-\frac{1}{16}\cos 4\tau)\Big|_0^\xi d\xi$$

$$=\int_0^t(\frac{1}{4}\sin 4\xi-\frac{1}{16}\cos 4\xi+\frac{1}{16})d\xi$$

$$=(-\frac{1}{16}\cos 4\xi-\frac{1}{64}\sin 4\xi+\frac{1}{16}\xi)\Big|_0^t$$

$$=-\frac{1}{16}\cos 4t-\frac{1}{64}\sin 4t+\frac{1}{16}t+\frac{1}{16}$$

9. **考慮一初始值問題** $x''(t)+p_0x'(t)+q_0x(t)=f(t)$，$t\geq 0$ **並且** $x(0)=x'(0)=0$

(1) **試求** p_0 **與** q_0 **使得其解** $x(t)$ **可被表示為**

$$x(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)f(\tau)d\tau,\ t\geq 0 \quad \textbf{(6\%)}$$

(2) **試求** $x(t)$ **當** $f(t)=e^{-t}\cos t$ **(6%)**

(3) **試求:** $x(t)$ **當** $p_0=2$，$q_0=1$ **與** $f(t)=e^{-t}$ **(5%)**

(1) 由拉普拉斯轉換可知:

$$\mathcal{L}[x''(t)+p_0x'(t)+q_0x(t)]=\mathcal{L}[f(t)]$$

$$\Rightarrow [s^2X(s)-sx(0)-x'(0)]+p_0[X(s)-x(0)]+q_0X(s)=F(s)$$

$$\Rightarrow (s^2+p_0s+q_0)X(s)=F(s)$$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{F(s)}{s^2+p_0s+q_0} \qquad \cdots(1)$$

又其解為 $x(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)f(\tau)d\tau=e^{-t}\sin t * f(t)$

由拉普拉斯轉換可知: $\mathcal{L}[x(t)]=\mathcal{L}[e^{-t}\sin t * f(t)]$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{1}{(s+1)^2+1}\cdot F(S) \qquad \cdots(2)$$

比較(1)與(2)可知: $p_0=2$，$q_0=2$

(2) $x(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)f(\tau)d\tau$ 又 $f(t)=e^{-t}\cos t$

$$\therefore\ x(t)=\int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)\cdot e^{-\tau}\cos\tau\, d\tau$$

$$=e^{-t}\int_0^t \sin(t-\tau)\cdot\cos\tau\, d\tau$$

$$=e^{-t}\int_0^t (\sin t\cdot\cos^2\tau-\cos t\cdot\sin\tau\cos\tau)d\tau$$

$$=\frac{e^{-t}}{2}\int_0^t [\sin t\cdot(1+\cos 2\tau)-\cos t\cdot\sin 2\tau]d\tau$$

$$=\frac{e^{-t}}{2}[\sin t\cdot(\tau+\frac{1}{2}\sin 2\tau)+\frac{1}{2}\cos t\cdot\cos 2\tau]\Big|_0^t$$

$$=\frac{1}{2}te^{-t}\sin t$$

(3) $p_0 = 2$，$q_0 = 1$ 與 $f(t) = e^{-t}$ $\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \dfrac{1}{s+1}$

由(1)可得 $X(s) = \dfrac{F(s)}{s^2 + p_0 s + q_0} = \dfrac{1}{(s+1)^3}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = x(t) = \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$$

10. 試以拉普拉斯轉換求解下述微分方程式

$ty'' + (1-3t)y' - 3y = 0$，$y(0) = 1$ **(12%)**

$$\mathcal{L}[ty'' + (1-3t)y' - 3y] = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + sY(s) - y(0) + 3\frac{d}{ds}[sY(s) - y(0)] - 3Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow -2sY(s) - s^2Y'(s) + y(0) + sY(s) - y(0) + 3Y(s) + 3sY'(s) - 3Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow Y'(s) + \frac{1}{s-3}Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow \ln|Y(s)| = -\ln|s-3| + \ln c$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{c}{s-3}$$

由初值定理： $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sY(s)$ **又** $y(0) = 1$ **可得** $\lim\limits_{s\to\infty} s \cdot \dfrac{c}{s-3} = 1 \Rightarrow c = 1$

$$\therefore \quad Y(s) = \frac{1}{s-3} \quad \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^{3t}$$

11. 試求解下述聯立微分方程組 (20%)

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_1 + y_2 + y_1' + y_2' \\ y_2'' = -5y_1 + 2y_2 + 5y_1' - y_2' \end{cases}$$ 且 $y_1(0) = y_2(0) = y_1'(0) = 4$ 與 $y_2'(0) = -4$

由拉普拉斯轉換可得

$$\begin{cases} s^2Y_1(s) - sy_1(0) - y_1'(0) = 2Y_1(s) + Y_2(s) + sY_1(s) - y_1(0) + sY_2(s) - y_2(0) \\ s^2Y_2(s) - sy_2(0) - y_2'(0) = -5Y_1(s) + 2Y_2(s) + 5sY_1(s) - 5y_1(0) - sY_2(s) + y_2(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s^2 - s - 2)Y_1(s) - (s+1)Y_2(s) = 4s - 4 & \cdots(1) \\ -5(s-1)Y_1(s) + (s^2 + s - 2)Y_2(s) = 4s - 20 & \cdots(2) \end{cases}$$

由 $(1)\cdot(s^2 + s - 2) + (2)\cdot(s+1)$ 可得

$$[(s^2 - s - 2)(s^2 + s - 2) - 5(s-1)(s+1)]Y_1(s) = 4(s-1)(s^2 + s - 2) + 4(s+1)(s-5)$$

$$\Rightarrow [(s+1)(s-2)(s-1)(s+2) - 5(s-1)(s+1)]Y_1(s) = 4[(s-1)^2(s+2) + (s+1)(s-5)]$$

$$\Rightarrow (s-1)(s+1)(s-3)(s+3)Y_1(s) = 4(s^3+s^2-7s-3)$$

$$\Rightarrow Y_1(s) = \frac{4(s^3+s^2-7s-3)}{(s-1)(s+1)(s-3)(s+3)} = \frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-3}+\frac{D}{s+3}$$

通分後比較係數可知:

$$A(s+1)(s-3)(s+3)+B(s-1)(s-3)(s+3)+D(s-1)(s+1)(s-3) = 4(s^3+s^2-7s-3)$$

由 $s=1 \quad \Rightarrow -16A=-32 \quad \Rightarrow A=2$

$s=-1 \quad \Rightarrow 16B=16 \quad \Rightarrow B=1$

$s=3 \quad \Rightarrow 48C=48 \quad \Rightarrow C=1$

$s=-3 \quad \Rightarrow -48D=0 \quad \Rightarrow D=0$

$$\Rightarrow Y_1(s) = \frac{2}{s-1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[Y_1(s)] = y_1(t) = 2e^t + e^{-t} + e^{3t}$$

由 $(1)\cdot 5(s-1)+(2)\cdot(s^2-s-2)$ 可得

$$[(s^2-s-2)(s^2+s-2)-5(s-1)(s+1)]Y_2(s) = 20(s-1)^2+4(s-5)(s^2-s-2)$$

$$\Rightarrow (s-1)(s+1)(s-3)(s+3)Y_2(s) = 4(s^3-s^2-7s+15)$$

$$\Rightarrow Y_2(s) = \frac{-2}{s-1}+\frac{5}{s+1}+\frac{1}{s-3}+\frac{0}{s+3}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[Y_2(s)] = y_2(t) = -2e^t + 5e^{-t} + e^{3t}$$