

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

考試方式：Open book

- 注意事項：1. 請使用A4白紙作答，並於每一頁上方標明 **班別、學號、姓名與頁碼** (例如：P.1, P.2, ...)
2. 作答完畢後，請拍照或掃描試卷，並使用學校電子信箱發 e-mail 到 ytlee@mail.ntou.edu.tw。請保留信件內容，已防止如果沒收到你們的 email 時，可由寄件備份再次轉發郵件以當證明。
3. 請自己作答，禁止與他人討論。

1. 給 $(e^{2x}y')' + e^{2x}(\lambda + 1)y = 0$ ， $y(0) = y(\pi) = 0$ ，試求其特徵值與特徵函數。(10%)

2. 試問下述函數是否為週期函數？若為週期函數，須寫出其週期為何？(10%)
 - (1) $3\sin t + 2\sin 3t$ (2) $2 + 5\sin 4t + 4\cos 7t$ (3) $2\sin 3t + 7\cos \pi t$
 - (4) $7\cos \pi t + 5\sin 2\pi t$ (5) $\sin \frac{5}{2}t + 3\cos \frac{6}{5}t + 3\sin(\frac{t}{7} + 30^\circ)$

3. 給一週期函數 $f(x) = (x-1)^2$ ， $0 \leq x \leq 2$ 且 $f(x) = f(x+2)$
 - (1) 試畫出此函數之圖形。(2%)
 - (2) 試求其傅立葉級數展開。(5%)
 - (3) 由(2)之結果試求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = ?$ (3%)

4. 若函數 $f(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$ ， $a > 0$ 的傅立葉轉換為 $F(\omega) = \left(\frac{\pi}{a}\right)e^{-a|\omega|}$ ，
 試問：函數 $g(t) = \frac{t}{(a^2 + t^2)^2}$ ， $a > 0$ 的傅立葉轉換 $G(\omega)$ 為何？(10%)

5. 給一函數 $f(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{2}, & |t| \leq 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$
 - (1) 試求其傅立葉轉換 $F(\omega)$ 為何？(6%)
 - (2) 試計算 $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt = ?$ (4%)

6. 已知 $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ 以及函數 $g(t) = e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_2 t}$ ，試問 $f(t) * g(t)$ 為何？(10%)

7. 試求函數 $F(\omega) = \frac{5}{2 - \omega^2 + 3i\omega}$ 之傅立葉反轉換 $f(x)$ 。(20%)

8. 試求:

(1) $\mathcal{L}[e^{at} \frac{\sinh t}{t}]$ (7%) (2) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+8}{s^2+4s+20}]$ (7%) (3) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{s^2(s^2+16)}]$ (7%)

9. 考慮一初始值問題 $x''(t) + p_0x'(t) + q_0x(t) = f(t)$, $t \geq 0$ 並且 $x(0) = x'(0) = 0$

(1) 試求 p_0 與 q_0 使得其解 $x(t)$ 可被表示為

$$x(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (6\%)$$

(2) 試求 $x(t)$ 當 $f(t) = e^{-t} \cos t$ (6%)

(3) 試求: $x(t)$ 當 $p_0 = 2$, $q_0 = 1$ 與 $f(t) = e^{-t}$ (5%)

10. 試以拉普拉斯轉換求解下述微分方程式

$$ty'' + (1-3t)y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1 \quad (12\%)$$

11. 試求解下述聯立微分方程組 (20%)

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_1 + y_2 + y_1' + y_2' \\ y_2'' = -5y_1 + 2y_2 + 5y_1' - y_2' \end{cases} \quad \text{且 } y_1(0) = y_2(0) = y_1'(0) = 4 \quad \text{與} \quad y_2'(0) = -4$$

12. 對工數的遠距教學有何感想? (5%) 對遠距教學上課方式有何建議? (5%)

(請各別作答)