國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(一) 第四次隨堂測驗參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 試以待定係數法求解 $y''+2y'+y=e^{-x}$

令 $y=e^{\lambda x}$ 代回 ODE 可得 $(\lambda^2+2\lambda+1)e^{\lambda x}=0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda+1=0$

$\Rightarrow (\lambda+1)^2=0$

$\Rightarrow \lambda=-1,-1$ (重根)

$\therefore\ y_h=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$

令 $y_p=Ax^2e^{-x} \quad \Rightarrow y_p'=A(2x-x^2)e^{-x}$

$\Rightarrow y_p''=A(2-4x+x^2)e^{-x}$ 代回 ODE 可得

$$A(2-4x+x^2)e^{-x}+2A(2x-x^2)e^{-x}+Ax^2e^{-x}=e^{-x} \quad \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ y_p=\frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

故可得通解 $y=y_h+y_p=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{-x}$

2. 試以參數變異法求解 $(\cos x)\cdot y''+(\cos x)\cdot y=1$

$(\cos x)\cdot y''+(\cos x)\cdot y=1 \quad \Rightarrow y''+y=\sec x$

令 $y=e^{\lambda x}$ 代回 ODE 可得 $(\lambda^2+1)e^{\lambda x}=0 \quad \Rightarrow \lambda^2+1=0$

$\Rightarrow \lambda=\pm i$

$\therefore\ y_h=C_1\cos x+C_2\sin x$

兩補解為 $y_1=\cos x$ 、 $y_2=\sin x$ ，故可知 $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=1$

由參數變異法可令其特解 $y_p=u_1y_1+u_2y_2$

$$可知\ u_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W}=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}=-\frac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow u_1=-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\ln|\cos x|$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W}=\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix}=1 \quad \Rightarrow u_2=\int 1dx=x.$$

$\therefore\ y_p=\ln|\cos x|\cdot\cos x+x\sin x$

$\Rightarrow y=y_h+y_p=C_1\cos x+C_2\sin x+\ln|\cos x|\cdot\cos x+x\sin x$