# 國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(一) 第三次隨堂測驗參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 給一微分方程 $x^2y''+3xy'+y=0$, 已知一補解為 $y_1=\dfrac{1}{x}$, 試求另一補解 $y_2$

$x^2y''+3xy'+y=0 \quad \Rightarrow y''+\dfrac{3}{x}y'+\dfrac{1}{x^2}y=0$ 已知其解為 $y_1=\dfrac{1}{x}$

由 Wronskian 可知

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2=C_1e^{-\int a\,dx}$$

$$\Rightarrow y_2'-\frac{y_1'}{y_1}y_2=\frac{C_1}{y_1}e^{-\int a\,dx}=\frac{C_1}{y_1}e^{-\int\frac{3}{x}dx}=\frac{C_1}{y_1}e^{-3\ln x}=\frac{C_1}{y_1}x^{-3}$$

又 $y_1=\dfrac{1}{x}$ 代入後可得

$\therefore\ y_2'+\dfrac{1}{x}y_2=C_1x^{-2}$ ⟶ 此為一階線性 ODE

可知積分因子為 $\mu=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln|x|}=x$

$$xy_2'+y_2=\frac{C_1}{x} \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy_2)=\frac{C_1}{x}$$

$$\Rightarrow xy_2=C_1\ln x+C_2$$

$$\Rightarrow y_2=C_1\frac{1}{x}\ln x+C_2\frac{1}{x}$$

$y_1=\dfrac{1}{x}$ 為其一補解，故可知另一補解為 $y_2=\dfrac{1}{x}\ln x$

2. 試求下述二階 ODE: $2y''+44y'+242y=0$

$2y''+44y'+242y=0 \quad \Rightarrow y''+22y'+121y=0$

令 $y=e^{\lambda x}$ 代回 ODE 可得 $(\lambda^2+22\lambda+121)e^{\lambda x}=0$

$$\Rightarrow \lambda^2+22\lambda+121=0$$

$$\Rightarrow (\lambda+11)^2=0$$

$$\Rightarrow \lambda=-11,-11\ (\text{重根})$$

$\therefore\ y=C_1e^{-11x}+C_2xe^{-11x}$