國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(一) 第十三次作業參考解答

系級：____________ 學號：____________ 姓名：____________

1. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}$

   (1) 試求 **A** 之特徵值、特徵向量並求 **A** 的 Jordan form。

   (2) 試求 $e^{\mathbf{A}t}$ 。

2. 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -3 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & -1 & 2\\ -2 & -3 & 1 & 4\end{bmatrix}$，求 **Q** 使得 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ 為 Jordan form。

參考解答:

1. (1) $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ -2 & -2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -\lambda^3=0 \Rightarrow \lambda=0,0,0$

當 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 時，可得 $\mathbf{x}^1=\begin{Bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{Bmatrix}$, $\mathbf{x}^2=\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{Bmatrix}$

$\because$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 只對應到 2 個特徵向量

$\therefore$ 需計算廣義特徵向量求 $\mathbf{x}^3$

$\because$ 由 $(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\mathbf{x}^3=\mathbf{x}^2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{Bmatrix}$ (矛盾)

$\therefore$ 調整 $\mathbf{x}^2$

令 $\mathbf{x}^2=c_1\begin{Bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{Bmatrix}+c_2\begin{Bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{Bmatrix}$ 取 $c_1=1$, $c_2=2$ 可得 $\mathbf{x}^2=\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{Bmatrix}$

由 $(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\mathbf{x}^3=\mathbf{x}^2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

令 $x_2 = s$，$x_3 = t$ $\Rightarrow x_1 = 1 - s - t$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1-s-t \\ s \\ t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} s + \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} t$$

取 $\mathbf{x}^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

可得 $\mathbf{P} = \left[\mathbf{x}^1\ \mathbf{x}^2\ \mathbf{x}^3\right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) $\mathbf{AP} = \mathbf{PJ} \quad \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$

$$f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & f(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t+1 & t & t \\ t & t+1 & t \\ -2t & -2t & -2t+1 \end{bmatrix}$$

2. $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2-4\lambda+4)=0$

$$\Rightarrow \lambda = 0, 0, 2, 2$$

當 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 時，$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{x}=\{0\} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

當 $\lambda_3=\lambda_4=2$ 時，$(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\mathbf{x}=\{0\} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^3=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix},\ \mathbf{x}^4=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$\because$ $\lambda_1=\lambda_2=0$ 只對應到 1 個特徵向量

$\therefore$ 需計算廣義特徵向量求 $\mathbf{x}^2$

由 $(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\mathbf{x}^2=\mathbf{x}^1 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^2=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}t+\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{取} \quad \mathbf{x}^2=\begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

可得 $\mathbf{Q}=\left[\mathbf{x}^1\ \mathbf{x}^2\ \mathbf{x}^3\ \mathbf{x}^4\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{J}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{AQ}=\mathbf{QJ} \quad \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{QJQ}^{-1}$ 或是 $\mathbf{J}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$