國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(一) 第十二次作業參考解答

系級：________________ 學號：______________ 姓名：_____________

1. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}11 & -4 & -7\\ 7 & -2 & -5\\ 10 & -4 & -6\end{bmatrix}$

 (1) 試求 **A** 之特徵值、特徵向量並將 **A** 對角化。

 (2) 若 $f(x)=x^2+2x+1$，試求 $f(\mathbf{A})$ 之特徵值與特徵向量。

2. 已知 $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ -2 & 6\end{bmatrix}$

 試求：$\mathbf{A}$ 、$\det(\mathbf{A})$ 、$\mathbf{A}^{-1}$ 、$\mathbf{A}^{10}$ 、$\mathbf{A}^3-2\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-2\mathbf{I}$ 、$e^{\mathbf{A}}$ 、$\cos(\mathbf{A})$

參考解答:

1. (1) $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}11-\lambda & -4 & -7\\ 7 & -2-\lambda & -5\\ 10 & -4 & -6-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=0$

$$\Rightarrow \lambda=0,1,2$$

當 $\lambda_1=0$ 時，可得 $\mathbf{x}^1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2=1$ 時，可得 $\mathbf{x}^2=\begin{Bmatrix}1\\-1\\2\end{Bmatrix}$

當 $\lambda_3=2$ 時，可得 $\mathbf{x}^3=\begin{Bmatrix}2\\1\\2\end{Bmatrix}$

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AS}=\mathbf{SD} \quad \Rightarrow \mathbf{D}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11 & -4 & -7\\ 7 & -2 & -5\\ 10 & -4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

(2) $f(\mathbf{A})$ 之特徵值為 $f(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1$

$\therefore\ \lambda_1=f(0)=0$，$\lambda_2=f(1)=4$，$\lambda_3=f(2)=9$

特徵向量 $\mathbf{x}^1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$, $\mathbf{x}^2=\begin{Bmatrix}1\\-1\\2\end{Bmatrix}$, $\mathbf{x}^3=\begin{Bmatrix}2\\1\\2\end{Bmatrix}$

2. $\mathbf{B}=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}-1 & 6\\ -2 & 6\end{bmatrix}\quad \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{B}^2=\begin{bmatrix}-11 & 30\\ -10 & 24\end{bmatrix}$

$\det(\mathbf{A})=36$

$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{36}\begin{bmatrix}24 & -30\\ 10 & -11\end{bmatrix}$

$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0\ \Rightarrow \begin{vmatrix}-11-\lambda & 30\\ -10 & 24-\lambda\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow (\lambda-4)(\lambda-9)=0\ \Rightarrow \lambda=4, 9$

當 $\lambda_1=4$ 時，可得 $\mathbf{x}^1=\begin{Bmatrix}2\\1\end{Bmatrix}$

當 $\lambda_2=9$ 時，可得 $\mathbf{x}^2=\begin{Bmatrix}3\\2\end{Bmatrix}$

$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $\mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}$

$\mathbf{AS}=\mathbf{SD}\quad \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{SDS}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{10}=\mathbf{SD}^{10}\mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4^{10} & 0\\ 0 & 9^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\cdot 4^{10}-3\cdot 9^{10} & -6\cdot 4^{10}+6\cdot 9^{10}\\ 2\cdot 4^{10}-2\cdot 9^{10} & -3\cdot 4^{10}+4\cdot 9^{10}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^3-2\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}-2\mathbf{I}&=\mathbf{S}(\mathbf{D}^3-2\mathbf{D}^2-3\mathbf{D}-2\mathbf{I})\mathbf{S}^{-1}\\ &=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}18 & 0\\ 0 & 538\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1542 & 3120\\ -1040 & 2098\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$e^{\mathbf{A}}=\mathbf{S}e^{\mathbf{D}}\mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^4 & 0\\ 0 & e^9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\cdot e^4-3\cdot e^9 & -6\cdot e^4+6\cdot e^9\\ 2\cdot e^4-2\cdot e^9 & -3\cdot e^4+4\cdot e^9\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\sin(\mathbf{A})=\mathbf{S}\cdot\sin(\mathbf{D})\cdot\mathbf{S}^{-1}&=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin(4) & 0\\ 0 & \sin(9)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}4\cdot\sin(4)-3\cdot\sin(9) & -6\cdot\sin(4)+6\cdot\sin(9)\\ 2\cdot\sin(4)-2\cdot e^9 & -3\cdot\sin(4)+4\cdot\sin(9)\end{bmatrix}\end{aligned}$$