國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(一) 第二次大考參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 給定一 Cauchy-Euler 微分方程式為 $x^4y'''' + ax^3y''' + bx^2y'' + cxy' + dy = 0$ ，其中 a, b, c, d 皆為常數。已知 $8\cos(\ln x) + \sin(\ln x) - 9\ln x \cdot \cos(\ln x) - 11\ln x \cdot \sin(\ln x)$ 是此 Cauchy-Euler 微分方程式的一解，試問 a, b, c, d 為何? (8%)

2. 已知微分方程式 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$ ，試問:
   (1) 其補解 $y_h = ?$ (6%)
   (2) 其特解 $y_p = ?$ 並寫出其通解。 (6%)

3. 已知微分方程式 $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = xe^x$
   (1) 試以觀察法求一補解 y_1。 (3%)
   (2) 試求另一補解 y_2。 (6%)
   (3) 試求其特解 y_p，並寫出其通解。 (6%)

4. 已知一微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{d}{dx}(\dfrac{y}{x}) + \dfrac{4}{x^2}y = x \quad (x > 0)$
   (1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x) = ?$ (5%)
   (2) 以變數變換，令 $t = \ln x$ ，則 $y(x) = Y(t)$ ，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (5%)
   (3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t) = ?$ (5%)
   (4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t) = ?$ (5%)
   (5) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$。 (3%)

5. 給一微分方程式 $x^2y'' + x(2-x)y' - 2y = x^3e^x$ ，試問此 ODE 補解與特解分別為何? (hint: 先同除 x^2 後再計算) (10%)

6. 試解:
   (1) $y'' + e^{3y}(y')^3 = 0$ (8%)
   (2) $y'' = 1 + (y')^2$ (8%)

7. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$，若給定質量塊 $m = 2$，阻尼係數 $c = 0$ 與彈簧常數 $k = 18$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0) = 0$ 與 $\dot{y}(0) = 0$，給一外力為 $f(t) = 4\sin\omega t$ ，試問:
   (1) 此系統的自然振動頻率 $\omega_n = ?$ (2%)
   (2) 當 $\omega = 2$ 時，其解為何? (5%) 此時外力對系統造成何種運動行為? (2%)
   (3) 當 $\omega = 3$ 時，其解為何? (5%) 此時外力對系統造成何種運動行為? (2%)

參考解答:

1. 給定一 Cauchy-Euler 微分方程式為 $x^4y'''' + ax^3y''' + bx^2y'' + cxy' + dy = 0$ **，其中** a, b, c, d **皆為常數。已知** $8\cos(\ln x) + \sin(\ln x) - 9\ln x\cdot\cos(\ln x) - 11\ln x\cdot\sin(\ln x)$ **是此 Cauchy-Euler 微分方程式的一解，試問 *a, b, c, d* 為何？ (8%)**

由補解形式可知此為四階 Euler-Cauchy ODE 的解為 $m = (\pm i)^2$

特徵方程式為 $(m^2+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow m^4 + 2m^2 + 1 = 0 \ldots(1)$

由齊次常微分方程式 $x^4y'''' + ax^3y''' + bx^2y'' + cxy' + dy = 0$

令 $y = x^m$ 帶入 ODE 可得

$m(m-1)(m-2)(m-3) + a\cdot m(m-1)(m-2) + b\cdot m(m-1) + c\cdot m + d = 0$

$\Rightarrow m^4 + (a-6)m^3 + (-3a+b+11)m^2 + (2a-b+c-6)m + d = 0 \ldots(2)$

由(1)與(2)比較係數可知 $a = 6$，$b = 9$，$c = 3$，$d = 1$

$\therefore$ 此齊次常微分方程式為 $x^4y'''' + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 3xy' + y = 0$

2. 已知微分方程式 $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$

(1) 先求其補解 y_h **。 (6%)**

(2) 再求其特解 y_p **，並寫出其通解。 (6%)**

(1) 求其補解 y_h

y_h 滿足 $y'' + 4y' + 4y = 0$

令 $y = e^{\lambda x}$ 代入上式可得 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow (\lambda+2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda = -2, -2$

$\therefore$ 可得 $y_h = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

(2) 令特解 $y_p = y_1u_1 + y_2u_2$ 代入 ODE 可知

$y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ 與 $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$，因此可得

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ e^{-2x}\ln x & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{-xe^{-4x}\ln x}{e^{-4x}} = -x\ln x \qquad \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & e^{-2x}\ln x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (1-2x)e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{-4x}\ln x}{e^{-4x}} = \ln x \qquad \Rightarrow u_2 = x\ln x - x$$

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2 = e^{-2x}(-\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2) + xe^{-2x}(x\ln x - x)$$

$$= x^2e^{-2x}(\frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{4})$$

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + x^2e^{-2x}(\frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{4})$$

3. 已知微分方程式 $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = xe^x$

(1) 試以觀察法求一補解 y_1 **。 (3%)**

(2) 試求另一補解 y_2 **。 (7%)**

(3) 試求其特解 y_p **，並寫出其通解。 (7%)**

(1) 由觀察法嘗試代入 $y = e^{ax}$ 來求補解可得

$$a^2xe^{ax} + 2a(1-x)e^{ax} + (x-2)e^{ax} = 0$$

$$\Rightarrow a^2x + 2a - 2ax + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1$$

故可得其一補解為 $y_1 = e^x$

(2) $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2 = e^x(y_2' - y_2)$

$$xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = 0 \quad \Rightarrow y'' + \frac{2(1-x)}{x}y' + \frac{x-2}{x}y = 0$$

又 W 滿足 $W' + \frac{2(1-x)}{x}W = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{W}dW = -\frac{2(1-x)}{x}dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{W}dW = -\int \frac{2(1-x)}{x}dx$$

$$\Rightarrow \ln|W| = -2\ln|x| + 2x + C$$

$$\Rightarrow W = \overline{C}x^{-2}e^{2x}$$

$$\therefore \quad e^x(y_2' - y_2) = \overline{C}\frac{1}{x^2}e^{2x} \quad \Rightarrow y_2' - y_2 = \overline{C}x^{-2}e^x$$

$$\Rightarrow e^{-x}y_2' - e^{-x}y_2 = \overline{C}x^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x}y_2) = \overline{C}x^{-2}$$

$$\Rightarrow e^{-x}y_2 = -\overline{C}_1x^{-1} + \overline{C}_2$$

$$\Rightarrow y_2 = -\overline{C}_1x^{-1}e^x + \overline{C}_2e^x$$

故可得另一補解為 $y_1 = x^{-1}e^x$

$$\therefore \quad y_h = C_1e^x + C_2\frac{1}{x}e^x$$

(3) 令特解 $y_p = y_1u_1 + y_2u_2$ 代入 ODE 可知

$y_1u_1' + y_2u_2' = 0$ 與 $y_1'u_1' + y_2'u_2' = \dfrac{f(x)}{x}$，因此可得

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-1}e^x \\ e^x & (-x^{-2}+x^{-1})e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x^{-1}e^x \\ e^x & (-x^{-2}+x^{-1})e^x \end{vmatrix}} = \frac{-x^{-1}e^{2x}}{-x^{-2}e^{2x}} = x \qquad \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}x^2$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x^{-1}e^x \\ e^x & (-x^{-2}+x^{-1})e^x \end{vmatrix}} = \frac{e^{2x}}{-x^{-2}e^{2x}} = -x^2 \qquad \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{3}x^3$$

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2 = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x - \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}e^x$$

$$= \frac{1}{6}x^2e^x$$

$$y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2\frac{1}{x}e^x + \frac{1}{6}x^2e^x$$

4. 已知一微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{d}{dx}(\dfrac{y}{x}) + \dfrac{4}{x^2}y = x$ **(** $x > 0$ **)**

(1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x) = ?$ **(5%)**

(2) 以變數變換，令 $t = \ln x$**，則** $y(x) = Y(t)$ **，試求轉換後以** $Y(t)$ **表示的微分方程式。 (5%)**

(3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t) = ?$ **(5%)**

(4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t) = ?$ **(5%)**

(5) 試將 $Y(t)$ **轉換回** $y(x)$ **。 (3%)**

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{d}{dx}(\dfrac{y}{x}) + \dfrac{4}{x^2}y = x \Rightarrow y'' - \dfrac{5}{x}y' + \dfrac{9}{x^2}y = x$

$\Rightarrow x^2y'' - 5xy' + 9y = x^3$ ⟶ 此為 Euler ODE

令 $y = x^m$ $\Rightarrow m(m-1)x^m - 5mx^m + 9x^m = 0$

$\Rightarrow m^2 - 6m + 9 = 0$

$\Rightarrow (m-3)^2 = 0$

$\Rightarrow m = 3$ or 3

$\therefore \; y_h = C_1x^3 + C_2x^3\ln x$

(2) 令 $t = \ln x \quad \Rightarrow x = e^t$

$\therefore\ y(x) = y(e^t) = Y(t)$

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{dY(t)}{dx} = \frac{dt}{dx}\cdot\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{x}Y'(t)$$

$$y''(x) = \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}Y'(t)) = -\frac{1}{x^2}Y'(t) + \frac{1}{x}\frac{dY'(t)}{dx} = \frac{1}{x^2}[Y''(t) - Y'(t)]$$

將 $y'(x)$ 與 $y''(x)$ 代回 ODE 可得

$$x^2\cdot\frac{1}{x^2}[Y''(t) - Y'(t)] - 5x\cdot\frac{1}{x}Y'(t) + 9Y(t) = e^{3t}$$

$$\Rightarrow Y''(t) - 6Y'(t) + 9Y(t) = e^{3t}$$

(3) $\because$ 此為常係數 ODE

$\therefore$ 令 $Y(t) = e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

$$(\lambda^2 - 6\lambda + 9)e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 3 \text{ or } 3$$

$$\therefore\ Y_h = C_1e^{3t} + C_2te^{3t}$$

(4) 由待定係數法，

令 $Y_p = At^2e^{3t} \qquad \Rightarrow Y_p' = A(2t + 3t^2)e^{3t}$

$\Rightarrow Y_p'' = A(2 + 12t + 9t^2)e^{3t}$ 代回 ODE 可得 $A = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ Y_P = \frac{1}{2}t^2e^{3t}$$

(5) $Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t) = C_1e^{3t} + C_2te^{3t} + \frac{1}{2}t^2e^{3t}$

$$\Rightarrow y(x) = C_1x^3 + C_2x^3\ln x + \frac{1}{2}x^3(\ln x)^2$$

5. 給一微分方程式 $x^2y'' + x(2-x)y' - 2y = x^3e^x$，試問此 ODE 補解與特解分別為何? (hint: 先同除 x^2 後再計算) (10%)

$$x^2y'' + x(2-x)y' - 2y = x^3e^x \quad \Rightarrow y'' + \frac{2-x}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = xe^x$$

令 $a_1 = 1, a_2 = \frac{2-x}{x}, a_3 = -\frac{2}{x^2}$

由 $a_1'' - a_2' + a_3 = 0$ 可知此為正合型 ODE

故有 $y''+\frac{2-x}{x}y'-\frac{2}{x^2}y=\frac{d}{dx}(b_1y'+b_0y)=b_1y''+b_1'y'+b_0y'+b_0y$

比較後可得 $b_1=1$，$b_1'+b_0=\frac{2-x}{x}\ \Rightarrow b_0=\frac{2-x}{x}$

$\therefore\ y''+\frac{2-x}{x}y'-\frac{2}{x^2}y=xe^x \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}(y'+\frac{2-x}{x}y)=xe^x$

$$\Rightarrow y'+(\frac{2}{x}-1)y=xe^x-e^x+C_1$$

此為一階線性 ODE

$\therefore$ 積分因子為 $\mu=e^{\int(\frac{2}{x}-1)dx}=e^{2\ln x-x}=x^2e^{-x}$

同乘積分因子後可得 $x^2e^{-x}y'+x^2e^{-x}(\frac{2}{x}-1)y=x^3-x^2+C_1x^2e^{-x}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2e^{-x}y)=x^3-x^2+\overline{C}_1x^2e^{-x}$$

$$\Rightarrow x^2e^{-x}y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\overline{C}_1(-2-2x-x^2)e^{-x}+C_2$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2e^x-\frac{1}{3}xe^x+C_1(\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}+1)+C_2x^{-2}e^x$$

6. 試解:

(1) $y''+e^{3y}(y')^3=0$ **(8%)**

(2) $y''=1+(y')^2$ **(8%)**

(1) $y''+e^{3y}(y')^3=0 \longrightarrow$ 缺自變數 x

令 $y'=u \quad \Rightarrow y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dy}=u\frac{du}{dy}$

$y''+e^{3y}(y')^3=0 \quad \Rightarrow u\frac{du}{dy}+e^{3y}u^3=0 \quad \Rightarrow u(\frac{du}{dy}+e^{3y}u^2)=0$

當 $u=0 \quad \Rightarrow y'=0 \quad \Rightarrow y=C$

當 $\frac{du}{dy}+e^{3y}u^2=0 \quad \Rightarrow \frac{1}{u^2}du=-e^{3y}dy \quad \Rightarrow \int\frac{1}{u^2}du=-\int e^{3y}dy$

$$\Rightarrow -u^{-1}=-\frac{1}{3}e^{3y}-C_1$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1}{3}e^{3y}+C_1$$

$$\Rightarrow \int dx=\int(\frac{1}{3}e^{3y}+C_1)dy$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{9}e^{3y}+C_1y+C_2$$

(2) $y''=1+(y')^2$ ⟶ 缺因變數 y

令 $y'=u \quad \Rightarrow y''=u'$

$y''=1+(y')^2 \quad \Rightarrow u'=1+u^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+u^2}du=dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{1+u^2}du=\int dx$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}u=x+C_1$$

$$\Rightarrow u=\tan(x+C_1)$$

$$\Rightarrow y'=\tan(x+C_1)$$

$$\Rightarrow y=\int\tan(x+C_1)dx$$

$$\Rightarrow y=\int\frac{\sin(x+C_1)}{\cos(x+C_1)}dx$$

$$\Rightarrow y=-\int\frac{1}{\cos(x+C_1)}d(\cos(x+C_1))$$

$$\Rightarrow y=-\ln\left|\cos(x+C_1)\right|+C_2$$

7. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$，若給定質量塊 $m=2$，阻尼係數 $c=0$ 與彈簧常數 $k=18$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0)=0$ 與 $\dot{y}(0)=0$，給一外力為 $f(t)=4\sin\omega t$，試問:

(1) 此系統的自然振動頻率 $\omega_n=?$ (2%)

(2) 當 $\omega=2$ 時，其解為何? (5%) 此時外力對系統造成何種運動行為? (2%)

(3) 當 $\omega=3$ 時，其解為何? (5%) 此時外力對系統造成何種運動行為? (2%)

(1) $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$ 又 $m=2$, $c=0$, $k=18$ 與 $f(t)=4\sin\omega t$

$\therefore \quad 2\ddot{y}(t)+18y(t)=4\sin\omega t \quad \Rightarrow \ddot{y}(t)+9y(t)=2\sin\omega t$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=3$$

(2) 當 $\omega=2\neq\omega_n$ 時，外力對系統產生激發行為

$\ddot{y}(t)+9y(t)=2\sin 2t$

令 $y(t)=e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

$(\lambda^2+9)e^{\lambda x}=0$

$\Rightarrow \lambda^2+9=0$

$\Rightarrow \lambda=3i,-3i$

$\therefore \quad y_h=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t$

令 $y_p=A\cos 2t+B\sin 2t$ 代入 ODE 可得

$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t + 9A\cos 2t + 9B\sin 2t = 2\sin 2t$$
$$\Rightarrow 5A\cos 2t + 5B\sin 2t = 2\sin 2t$$
$$\therefore \quad A = 0\,,\quad B = \frac{2}{5}$$
$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + \frac{2}{5}\sin 2t$$
又 $y(0) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0$

$\dot{y}(0) = 0 \quad \Rightarrow C_2 = -\dfrac{4}{15}$

$$\therefore \quad y(t) = -\frac{4}{15}\sin 3t + \frac{2}{5}\sin 2t$$

(3) 當 $\omega = \omega_n = 3$ 時，外力對系統產生共振行為

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = 2\sin 3t$$

令 $y_p = t(A\cos 3t + B\sin 3t) = t \cdot y_h$

$$\dot{y}_p = y_h + t\,\dot{y}_h$$

$\ddot{y}_p = \dot{y}_h + \dot{y}_h + t\,\ddot{y}_h = 2\dot{y}_h + t\,\ddot{y}_h$ 代回 ODE 可得

$$(2\dot{y}_h + t\cdot\ddot{y}_h) + 9t\cdot y_h = 2\sin 3t$$
$$\Rightarrow 2\dot{y}_h = 2\sin 3t$$
$$\Rightarrow -3A\sin 3t + 3B\cos 3t = \sin 3t$$
$$\therefore \quad A = -\frac{1}{3},\quad B = 0$$
$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t - \frac{1}{3}t\cdot\cos 3t$$
又 $y(0) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0$

$\dot{y}(0) = 0 \quad \Rightarrow C_2 = \dfrac{1}{9}$

$$\therefore \quad y(t) = \frac{1}{9}\sin 3t - \frac{1}{3}t\cdot\cos 3t$$