

系級：\_\_\_\_\_ 學號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

1. 給定一 Cauchy-Euler 微分方程式為  $x^4 y'''' + ax^3 y''' + bx^2 y'' + cxy' + dy = 0$ ，其中  $a, b, c, d$  皆為常數。已知  $8\cos(\ln x) + \sin(\ln x) - 9\ln x \cdot \cos(\ln x) - 11\ln x \cdot \sin(\ln x)$  是此 Cauchy-Euler 微分方程式的一解，試問  $a, b, c, d$  為何？ (8%)
  
2. 已知微分方程式  $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$ ，試問：
  - (1) 其補解  $y_h = ?$  (6%)
  - (2) 其特解  $y_p = ?$  並寫出其通解。 (6%)
  
3. 已知微分方程式  $xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = xe^x$ 
  - (1) 試以觀察法求一補解  $y_1$ 。 (3%)
  - (2) 試求另一補解  $y_2$ 。 (6%)
  - (3) 試求其特解  $y_p$ ，並寫出其通解。 (6%)
  
4. 已知一微分方程式  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{4}{x^2}y = x \quad (x > 0)$ 
  - (1) 試求此微分方程的補解  $y_h(x) = ?$  (5%)
  - (2) 以變數變換，令  $t = \ln x$ ，則  $y(x) = Y(t)$ ，試求轉換後以  $Y(t)$  表示的微分方程式。 (5%)
  - (3) 試求轉換後微分方程的補解  $Y_h(t) = ?$  (5%)
  - (4) 試求轉換後微分方程的特解  $Y_p(t) = ?$  (5%)
  - (5) 試將  $Y(t)$  轉換回  $y(x)$ 。 (3%)
  
5. 給一微分方程式  $x^2 y'' + x(2-x)y' - 2y = x^3 e^x$ ，試問此 ODE 補解與特解分別為何？ (hint: 先同除  $x^2$  後再計算) (10%)
  
6. 試解：
  - (1)  $y'' + e^{3y}(y')^3 = 0$  (8%)
  - (2)  $y'' = 1 + (y')^2$  (8%)
  
7. 已知單自由度振動系統其數學表示為  $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$ ，若給定質量塊  $m = 2$ ，阻尼係數  $c = 0$  與彈簧常數  $k = 18$  並且質量塊為靜止狀態即其初始條件  $y(0) = 0$  與  $\dot{y}(0) = 0$ ，給一外力為  $f(t) = 4\sin \omega t$ ，試問：
  - (1) 此系統的自然振動頻率  $\omega_n = ?$  (2%)
  - (2) 當  $\omega = 2$  時，其解為何？ (5%) 此時外力對系統造成何種運動行為？ (2%)
  - (3) 當  $\omega = 3$  時，其解為何？ (5%) 此時外力對系統造成何種運動行為？ (2%)