國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(一) 第一次大考參考解答

系級：____________ 學號：____________ 姓名：____________

1. xy 平面上有一曲線 $g(x,y)=0$ 恆過點 $(0,-1)$，且其上任一點 (x,y) 的切線在 x 軸上的截距為 y^2e^{-y}，試求此曲線的方程式。 (10%)

2. 試以分離變數法求解下述微分方程式
   (1) $y' = \sec^2 x \cdot \cos^2 y \cdot \sin x$ (8%)
   (2) $(y^2+2y+5)dx - dy = 0$ (8%)
   (3) $y' = \dfrac{3x-y-9}{x+y+1}$ (8%) (109 台科大丙組)

3. 已知微分方程式為 $(-x+4y\ln y)y' = y$
   (1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(7%)
   (若為線性，直接求解；若非線性，則轉換成線性，再求解)
   (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(7%)
   (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

4. 已知微分方程式為 $y^2dx + (2xy - x^4)dy = 0$
   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)
   (2) 此為線性或非線性? (2%)
   (3) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (7%)
   (4) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%)
   (5) 試以正合法求解。 (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解) (7%)

5. 已知微分方程式為 $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$
   (1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)
   (2) 此為線性或非線性? (2%)
   (3) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (8%)

6. 試解下列各微分方程
   (1) $xy' - y = \dfrac{y}{\ln y - \ln x}$ (8%)
   (2) $xy(y')^2 + (x^2+xy+y^2)y' + x(x+y) = 0$ (8%)

<參考解答>

1. xy **平面上有一曲線** $g(x,y)=0$ **恆過點** $(0,-1)$ **，且其上任一點** $(x,\ y)$ **的切線在** x **軸上的截距為** y^2e^{-y} **，試求此曲線的方程式。 (10%)**

由題意可知 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-0}{x-y^2e^{-y}} \quad \Rightarrow \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x-y^2e^{-y}}{y}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=-ye^{-y}$$

可視為以 y 為自變數，x 為應變數的一階線性微分方程式

其積分因子 $\mu=e^{\int p(y)dy}=e^{-\int \frac{1}{y}dy}=e^{-\ln|y|}=\dfrac{1}{y}$

同乘積分因子後可得

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y^2}x=-e^{-y} \quad \Rightarrow \frac{d}{dy}(\frac{1}{y}x)=-e^{-y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}x=e^{-y}+C$$

$$\Rightarrow x=ye^{-y}+Cy$$

又通過點 $(0,-1)$ ，即 $y(0)=-1$ 代入後可得 $C=-e$

$\therefore \quad x=ye^{-y}-ey$

2. 試以分離變數法求解下述微分方程式

(1) $y'=\sec^2 x\cdot\cos^2 y\cdot\sin x$ **(8%)**

(2) $(y^2+2y+5)dx-dy=0$ **(8%)**

(3) $y'=\dfrac{3x-y-9}{x+y+1}$ **(8%)**

(1) $y'=\sec^2 x\cdot\cos^2 y\cdot\sin x \quad \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2 y}dy=\sec^2 x\cdot\sin x\,dx$

$$\Rightarrow \sec^2 y\,dy=\sec x\cdot\tan x\,dx$$

(兩邊積分) $\Rightarrow \int\sec^2 y\,dy=\int\sec x\cdot\tan x\,dx$

$$\Rightarrow \tan y=\sec x+C$$

(2) $(y^2+2y+5)dx-dy=0 \Rightarrow \dfrac{1}{y^2+2y+5}dy=dx$

(兩邊積分) $\Rightarrow \int\dfrac{1}{y^2+2y+5}dy=\int dx$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(y+1)^2+4}dy = \int dx$$

令 $u = y+1 \quad \Rightarrow du = dy$

$$\int \frac{1}{(y+1)^2+4}dy = \int dx \quad \Rightarrow \int \frac{1}{u^2+4}du = \int dx$$

令 $u = 2\tan\theta \quad \Rightarrow du = 2\sec^2\theta\, d\theta$

$$\int \frac{1}{u^2+4}du = \int dx \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}d\theta = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int d\theta = \int dx$$

$$\Rightarrow \theta = 2x + C$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{u}{2} = 2x + C$$

$$\Rightarrow y+1 = 2\tan(2x+C)$$

(3) $y' = \dfrac{3x-y-9}{x+y+1} \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x-y-9}{x+y+1}$

令 $x = u + a \quad \Rightarrow dx = du$

$y = v + b \quad \Rightarrow dy = dv$

代回 ODE 可得 $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{3u - v + (3a-b-9)}{u+v+(a+b+1)}$

可得 $\begin{cases} 3a-b-9=0 \\ a+b+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$

$\therefore \dfrac{dv}{du} = \dfrac{3u-v}{u+v} \quad \Rightarrow \dfrac{dv}{du} = \dfrac{3-\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}$

令 $t = \dfrac{v}{u} \quad \Rightarrow v = ut \quad \Rightarrow \dfrac{dv}{du} = t + u\dfrac{dt}{du}$ 代回 ODE 可得

$$t + u\frac{dt}{du} = \frac{3-t}{1+t} \quad \Rightarrow u\frac{dt}{du} = \frac{3-t}{1+t} - t = \frac{3-2t-t^2}{1+t}$$

$$\Rightarrow -\frac{t+1}{t^2+2t-3}dt = \frac{1}{u}du$$

$$\Rightarrow -\int \frac{t+1}{t^2+2t-3}dt = \int \frac{1}{u}du$$

令 $s = t^2+2t-3 \quad \Rightarrow ds = 2(t+1)dt$

$$\therefore \Rightarrow -\int \frac{t+1}{t^2+2t-3}dt = \int \frac{1}{u}du \quad \Rightarrow -\int \frac{1}{s}ds = 2\int \frac{1}{u}du$$

$$\Rightarrow -\ln|s| = 2\ln|u| + C$$

$$\Rightarrow su^2 = \frac{1}{e^C}$$

$$\Rightarrow (t^2 + 2t - 3)u^2 = C_1$$

$$\Rightarrow (\frac{v^2}{u^2} + 2\frac{v}{u} - 3)u^2 = C_1$$

$$\Rightarrow v^2 + 2uv - 3u^2 = C_1$$

$$\Rightarrow (y+3)^2 + 2(x-2)(y+3) - 3(x-2)^2 = C_1$$

3. 已知微分方程式為 $(-x + 4y\ln y)y' = y$

(1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(7%)

(若為線性，直接求解；若非線性，則轉換成線性，再求解)

(2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(7%)

(若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

(1) $(-x + 4y\ln y)y' = y \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{-x + 4y\ln y}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-x + 4y\ln y}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 4\ln y$$

若以 x 為自變數，y 為應變數，則此為一階非線性微分方程式

若以 y 為自變數，x 為應變數，則此為一階線性微分方程式

積分因子 $\mu = e^{\int p(y)dy} = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln|y|} = y$

同乘積分因子後可得

$$y\frac{dx}{dy} + x = 4y\ln y \quad \Rightarrow \frac{d}{dy}(yx) = 4y\ln y$$

$$\Rightarrow yx = 2y^2\ln y - y^2 + C$$

$$\Rightarrow x = 2y\ln y - y + Cy^{-1}$$

(2) $(-x + 4y\ln y)y' = y \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{-x + 4y\ln y}$

$$\Rightarrow ydx + (x - 4y\ln y)dy = 0$$

令 $M = y \quad \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$

$N = x - 4y\ln y \quad \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1$

由判斷式 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ 可知，此為正合 ODE

$\therefore$ 可知 $M=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=y \quad \Rightarrow \phi = xy + f(y)$

$$N=\frac{\partial\phi}{\partial y}=x-4y\ln y \quad \Rightarrow \phi = xy-2y^2\ln y+y^2+g(x)$$

比較後可得 $\phi(x,y)=xy-2y^2\ln y+y^2=C$

4. **已知微分方程式為** $y^2dx+(2xy-x^4)dy=0$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 此為線性或非線性? (2%)

(3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=?$ **(7%)**

(4) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%)

(5) 試以正合法求解。 (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解) (7%)

(1) $y^2dx+(2xy-x^4)dy=0 \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y^2}{2xy-x^4} \quad \Rightarrow \dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{2xy-x^4}{y^2}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{2}{y}x=\frac{1}{y^2}x^4$$

若以 x 為自變數，y 為應變數，則此為一階非線性 ODE

若以 y 為自變數，x 為應變數，則此為 Bernoulli ODE

(2) 非線性

(3) $\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{2}{y}x=\dfrac{1}{y^2}x^4 \quad \Rightarrow x^{-4}\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{2}{y}x^{-3}=\dfrac{1}{y^2}$

令 $u=x^{-3} \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dy}=-3x^{-4}\dfrac{dx}{dy}$ 代回 ODE 可得

$-\dfrac{1}{3}\dfrac{du}{dy}+\dfrac{2}{y}u=\dfrac{1}{y^2} \quad \Rightarrow \dfrac{du}{dy}-\dfrac{6}{y}u=-\dfrac{3}{y^2}$ ⟶ 此為一階線性 ODE

可知其積分因子為 $\mu=e^{\int p(y)dy}=e^{-\int\frac{6}{y}dy}=e^{-6\ln|y|}=\dfrac{1}{y^6}$

同乘積分因子後可得 $\dfrac{1}{y^6}\dfrac{du}{dy}-\dfrac{6}{y^7}u=-\dfrac{3}{y^8} \quad \Rightarrow \dfrac{d}{dy}(\dfrac{1}{y^6}u)=-\dfrac{3}{y^8}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^6}u=\frac{3}{7}y^{-7}+C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3}-\frac{3}{7y}=Cy^6$$

(4) $y^2dx+(2xy-x^4)dy=0$

令 $M=y^2 \quad \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=2y$

$N=2xy-x^4 \quad \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=2y-4x^3$

由判斷式 $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$ 可知，此不是正合 ODE

(5) $\therefore$ 由 $\dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x})=\dfrac{4x^3}{2xy-x^4}$ 與 $\dfrac{1}{M}(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y})=\dfrac{-4x^3}{y^2}$

可知 μ 非單純為 x 函數或 y 函數

$\therefore$ 令 $\mu=x^m y^n$

同乘積分因子後可得

$x^m y^{n+2}dx+(2x^{m+1}y^{n+1}-x^{m+4}y^n)dy=0$

此為正合微分方程

$\therefore \quad \overline{M}=x^m y^{n+2} \quad \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{M}}{\partial y}=(n+2)x^m y^{n+1}$

$\overline{N}=2x^{m+1}y^{n+1}-x^{m+4}y^n \quad \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{N}}{\partial x}=2(m+1)x^m y^{n+1}-(m+4)x^{m+3}y^n$

又 $\dfrac{\partial \overline{M}}{\partial y}=\dfrac{\partial \overline{N}}{\partial x} \quad \Rightarrow m=-4 \quad \Rightarrow m=-4, n=-8$

$\therefore \quad \overline{M}=\dfrac{\partial \phi}{\partial x}=x^{-4}y^{-6} \quad \Rightarrow \phi=-\dfrac{1}{3}x^{-3}y^{-6}+f(y)$

$\overline{N}=\dfrac{\partial \phi}{\partial y}=2x^{-3}y^{-7}-y^{-8} \quad \Rightarrow \phi=-\dfrac{1}{3}x^{-3}y^{-6}+\dfrac{1}{7}y^{-7}+g(x)$

由上兩式可知 $\phi(x,y)=-\dfrac{1}{3}x^{-3}y^{-6}+\dfrac{1}{7}y^{-7}=C_1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3}-\frac{3}{7y}=Cy^6$$

5. 已知微分方程式為 $y=xy'+\dfrac{1}{y'}$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (Clairaut、Bernoulli 或是 Riccati) (2%)

(2) 此為線性或非線性? (2%)

(3) 試求此微分方程式之解 $y(x)=?$ **(8%)**

(1) 此為 Clairaut ODE

(2) 屬於非線性 ODE

(3) 令 $p=y' \quad \Rightarrow y=xp+\dfrac{1}{p}$

將兩邊對 x 微分可得 $y' = p + xp' - \frac{p'}{p^2}$

$$\Rightarrow p = p + xp' - \frac{p'}{p^2}$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{p^2})p' = 0$$

由 $p' = 0 \quad \Rightarrow y' = p = c$ 代回 $y = xy' + \frac{1}{y'}$

可得 $y = xc + \frac{1}{c}$ (通解)

由 $x - \frac{1}{p^2} = 0 \quad \Rightarrow p^2 = (y')^2 = \frac{1}{x}$ 代回 $y = xy' + \frac{1}{y'}$

$$\Rightarrow y'y = x(y')^2 + 1$$
$$\Rightarrow y'y = 2$$
$$\Rightarrow (y'y)^2 = 4$$
$$\Rightarrow y^2 = 4x \qquad \text{(奇解)}$$

6. 試解下列各微分方程

(1) $xy' - y = \frac{y}{\ln y - \ln x}$ **(8%)**

(2) $xy(y')^2 + (x^2 + xy + y^2)y' + x(x+y) = 0$ **(8%)**

(1) $xy' - y = \frac{y}{\ln y - \ln x} \quad \Rightarrow xdy - ydx = \frac{y}{\ln \frac{y}{x}} dx$

$$\Rightarrow \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{y}{\ln \frac{y}{x}} dx$$

$$\Rightarrow \frac{\ln \frac{y}{x}}{\frac{y}{x}} d(\frac{y}{x}) = \frac{1}{x} dx$$

(令 $u = \frac{y}{x}$ 並對兩邊積分) $\Rightarrow \int \frac{\ln u}{u} du = \int \frac{1}{x} dx$

$$\Rightarrow \int \ln u \, d(\ln u) = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\ln|u|)^2 = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\ln\left|\frac{y}{x}\right|)^2 = \ln|x| + C$$

(2) $xy(y')^2+(x^2+xy+y^2)y'+x(x+y)=0$ **(8%)**

令 $u=y'$ 代回 ODE 可得

$$xyu^2+(x^2+xy+y^2)u+x(x+y)=0$$

$$\Rightarrow [xu+(x+y)](yu+x)=0$$

$$\Rightarrow xu+(x+y)=0 \text{ or } yu+x=0$$

$$xu+(x+y)=0 \Rightarrow xy'+y=-x \Rightarrow d(xy)=-x \Rightarrow xy=-\frac{1}{2}x^2+\overline{C}_1$$

$$\Rightarrow x^2+2xy-C_1=0$$

$$yu+x=0 \Rightarrow yy'=-x \Rightarrow ydy=-xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+\overline{C}_2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-C_2=0$$

$\therefore$ 此 ODE 的解為 $(x^2+2xy-C_1)(x^2+y^2-C_2)=0$