國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(一) 期末考參考解答

系級：__________ 學號：__________ 姓名：__________

1. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & -4 & -3 \end{bmatrix}$，試問 $\det(A)$ 為何? (6%)

2. 給一矩陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，已知其有一特徵值為 3，試問 y 為何? (4%)
並求其它特徵值為何? (6%)

3. 給一矩陣 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，試問:
(1) $\det(A)=?$ (3%) (2) $A^{-1}=?$ (3%) (3)矩陣 A 為何種矩陣? (2%)

4. 已知 $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，試求:
(1) $\det(A^T)=?$ (2) $\det(3B^{-1})=?$ (3) $\det(AB)=?$ (4) $(AB)^{-1}=?$ (12%)

5. 已知向量集 $\{x^1, x^2, x^3\}$，其中 $x^1=[1\ 1\ 1]^T$，$x^2=[1\ 2\ 3]^T$，$x^3=[1\ -1\ 3]^T$，試以 Gram-Schmidt 法找出其正交單位集合 $\{u^1, u^2, u^3\}$，並利用此集合來表示 $u=[2\ -5\ 6]^T$，即 $u=au^1+bu^2+cu^3$。 (12%)

6. 給方程式 $x_1^2-4x_1x_2-2x_2^2=12$，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T=[y_1\ y_2]$，試問其轉換矩陣為何? (5%) 判斷此方程代表何種圓錐曲線? (3%) $Q=x_1^2-4x_1x_2-2x_2^2$ 為何種型式二次式 (正定、負定或是不定型)? (2%)

7. 已知 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，試問:

(1) A 的特徵方程為何? (3%)

(2) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ ，則 $p=?$，$q=?$，$r=?$ $A^{-1}=?$ (8%)

(3) 試以 Cayley-Hamilton 法計算 e^A 。(6%)

(4) 試將化為 Jordan form，即 $A=PJP^{-1}$ (5%)

(5) 若 $A^{-1}=P\bar{J}P^{-1}$ ，則 $\bar{J}=?$ (5%)

(6) 試以 Jordan form 法計算 e^A 。 (5%)

8. 試解: $\dfrac{dx}{dt}=Ax+z$ 其中 $A=\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $z=\begin{Bmatrix} 5e^t \\ -6e^t \end{Bmatrix}$ 。 (10%)

參考解答:

1. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & -4 & -3 \end{bmatrix}$，試問 $\det(A)$ 為何? **(6%)**

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & -4 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 10 & 1 & -7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & -4 & -3 \end{vmatrix}=2\cdot 5\cdot\begin{vmatrix} 10 & -7 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=120$$

2. 給一矩陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，**已知其有一特徵值為 3，試問 y 為何? (4%)**

並求其它特徵值為何? (6%)

$$\det(A-3I)=0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y-3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \ \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} y-3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -(y-3)-1=0$$

$$\Rightarrow y=2$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2-1)\cdot(\lambda^2-4\lambda+3)=0$$

$$\Rightarrow (\lambda+1)\cdot(\lambda-1)^2\cdot(\lambda-3)=0$$

$$\Rightarrow \lambda=-1,1,1,3$$

其它特徵值為 -1, 1 (重根)

3. 給一矩陣 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$，**試問:**

(1) $\det(A) = ?$ **(3%)** **(2)** $A^{-1} = ?$ **(3%)** **(3)矩陣 A 為何種矩陣? (2%)**

(1) $\det(A) = 1$

(2) $A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

(3) 單位正交矩陣（orthonormal matrix）

4. 已知 $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，試求:

(1) $\det(A^T) = ?$ **(2)** $\det(3B^{-1}) = ?$ **(3)** $\det(AB) = ?$ **(4)** $(AB)^{-1} = ?$ **(12%)**

(1) $\det(A^{-1}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$

$AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I) \Rightarrow \det(A)\cdot\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A) = -2$

又 $\det(A^T) = \det(A) = -2$

(2) $\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9$

$BB^{-1} = I \Rightarrow \det(BB^{-1}) = \det(I) \Rightarrow \det(B)\cdot\det(B^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(B^{-1}) = \frac{1}{9}$

$\det(3B^{-1}) = 3^2 \cdot \det(B^{-1}) = 1$

(3) $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) = -18$

(4) $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -9 & 14 \end{bmatrix}$$

5. 已知向量集$\{x^1, x^2, x^3\}$，其中 $x^1 = [1\ 1\ 1]^T$，$x^2 = [1\ 2\ 3]^T$，$x^3 = [1\ -1\ 3]^T$，試以 Gram-Schmidt 法找出其正交單位集合$\{u^1, u^2, u^3\}$，並利用此集合來表示 $u = [2\ -5\ 6]^T$，即 $u = au^1 + bu^2 + cu^3$。 (12%)

$x^1 = [1\ 1\ 1]^T \Rightarrow u^1 = \frac{x^1}{\|x^1\|} = [\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}]^T$

$b^2 = x^2 - \langle x^2, u^1 \rangle u^1 = [-1\ 0\ 1]^T$

$$\Rightarrow u^2=\frac{b^2}{\|b^2\|}=[-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$$

$$b^3=x^3-<x^3,u^1>u^1-<x^3,u^2>u^2=[1\ \ -2\ \ 1]^T$$

$$\Rightarrow u^3=\frac{b^3}{\|b^3\|}=[\frac{1}{\sqrt{6}}\ \ -\frac{2}{\sqrt{6}}\ \ \frac{1}{\sqrt{6}}]^T$$

$u=[2\ \ -5\ \ 6]^T$ 又 $u=au^1+bu^2+cu^3$

$\Rightarrow a=\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，$c=3\sqrt{6}$

6. 給方程式 $x_1^2-4x_1x_2-2x_2^2=12$，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T=[y_1\ y_2]$，試問其轉換矩陣為何? (5%) 判斷此方程代表何種圓錐曲線? (3%) $Q=x_1^2-4x_1x_2-2x_2^2$ 為何種型式二次式 (正定、負定或是不定型)? (2%)

$x_1^2-4x_1x_2-2x_2^2=12 \Rightarrow \mathbf{x}^T\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & -2\end{bmatrix}\mathbf{x}=12$ 其中 $\mathbf{x}=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}$

由 $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda=2 \text{ or } -3$

當 $\lambda=2$ 時，$\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & -4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{Bmatrix}2\\ -1\end{Bmatrix}$

當 $\lambda=-3$ 時，$\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \Rightarrow x^1=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{Bmatrix}1\\ 2\end{Bmatrix}$

$\therefore\ s=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow s^{-1}=s^T=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

令 $y=s^Tx$

$$x^T\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & -2\end{bmatrix}x=12 \Rightarrow x^Ts\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}s^Tx=12$$

$$\Rightarrow y^T\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}y=12$$

$$\Rightarrow 2y_1^2-3y_2^2=12$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{(\sqrt{6})^2}-\frac{y_2^2}{2^2}=1$$

$\therefore$ 此為雙曲線

$\because\ \lambda_1>0,\ \lambda_2<0$

$\therefore\ Q=x_1^2-4x_1x_2-2x_2^2$ 為不定型二次式

7. 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -3 & -1 & -2\\ 7 & 5 & 6\end{bmatrix}$**，試問:**

(1) A **的特徵方程為何? (3%)**

(2) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ **，則** $p=?$**，**$q=?$**，**$r=?$ $A^{-1}=?$ **(8%)**

(3) 試以 Cayley-Hamilton 法計算 e^A **。(6%)**

(4) 試將化為 Jordan form，即 $A=PJP^{-1}$ **(5%)**

(5) 若 $A^{-1}=P\bar{J}P^{-1}$ **，則** $\bar{J}=?$ **(5%)**

(6) 試以 Jordan form 法計算 e^A **。 (5%)**

(1) $|A-\lambda I|=0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix}-\lambda & -1 & -1\\ -3 & -1-\lambda & -2\\ 7 & 5 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0$ (特徵方程式)

$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$

$\Rightarrow \lambda=1, 2, 2$

(2) 由 Cayley-Hamilton 定理可知: $A^3-5A^2+8A-4I=0$

$\Rightarrow A^{-1}(A^3-5A^2+8A-4I)=0$

$\Rightarrow A^2-5A+8I-4A^{-1}=0$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}A^2-\frac{5}{4}A+2I$

$\therefore \quad p=\frac{1}{4},\ q=-\frac{5}{4},\ r=2$

$$A^{-1}=\frac{1}{4}A^2-\frac{5}{4}A+2I=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4 & -4 & -4\\ -11 & -6 & -7\\ 27 & 18 & 19\end{bmatrix}-\frac{5}{4}\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ -3 & -1 & -2\\ 7 & 5 & 6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 4 & 7 & 3\\ -8 & -7 & -3\end{bmatrix}$$

(3) $e^A=Q(A)\cdot(A^3-5A^2+8A-4I)+\bar{p}A^2+\bar{q}A+\bar{r}I$

$\Rightarrow e^\lambda=Q(\lambda)\cdot(\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4)+\bar{p}\lambda^2+\bar{q}\lambda+\bar{r}$

代入 $\lambda=1$ 可得 $e=\bar{p}+\bar{q}+\bar{r}$ … (1)

代入 $\lambda=2$ 可得 $e^2=4\bar{p}+2\bar{q}+\bar{r}$ … (2)

對 λ 微分 $\Rightarrow e^\lambda=2\lambda\,\bar{p}+\bar{q}$

微分後代入 $\lambda = 2$ 可得 $e^2 = 4\overline{p} + q$ … (3)

解聯立後可得 $p = e$，$q = e^2 - 4e$，$r = 4e - e^2$

$e^A = \overline{p}A^2 + \overline{q}A + \overline{r}I$

$$= e\begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \\ -11 & -6 & -7 \\ 27 & 18 & 19 \end{bmatrix} + (e^2 - 4e)\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix} + (4e - e^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^2 & -e^2 & e^2 \\ e - 3e^2 & 2e - 2e^2 & e - 2e^2 \\ -e + 7e^2 & -2e + 5e^2 & -e + 5e^2 \end{bmatrix}$$

(4) 當 $\lambda_1 = 1$ 時，$(A - \lambda_1 I)x^1 = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

當 $\lambda_2 = 2$ 時，$(A - \lambda_2 I)x^2 = 0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow x^2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

$\because$ $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 只對應到 1 個特徵向量

$\therefore$ 需計算廣義特徵向量求 x^3

由 $(x - \lambda_3 I)x^3 = x^2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -2 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{Bmatrix}$

$$\Rightarrow x^3 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{Bmatrix} t$$

取 $t=1$ 可得 $\Rightarrow x^3=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1\\0\\1\end{Bmatrix}$

$$\therefore\quad J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\-1&-3&1\end{bmatrix}\ \Rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&-1&-1\\-2&-1&-1\end{bmatrix}$$

$\therefore A=PJP^{-1}$

(5) $f(A)=A^{-1}\quad\Rightarrow f(\lambda)=\lambda^{-1}\qquad\Rightarrow f'(\lambda)=-\lambda^{-2}$

$$A^{-1}=P\bar{J}P^{-1}\quad\Rightarrow \bar{J}=\begin{bmatrix}f(\lambda_1)&0&0\\0&f(\lambda_2)&f'(\lambda_2)\\0&0&f(\lambda_2)\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{J}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=P\bar{J}P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\-1&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&-1&-1\\-2&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&1&1\\4&7&3\\-8&-7&-3\end{bmatrix}$$

(6) $f(A)=e^A\quad\Rightarrow f(\lambda)=e^{\lambda}\qquad\Rightarrow f'(\lambda)=e^{\lambda}$

$$A^{-1}=P\bar{J}P^{-1}\quad\Rightarrow \bar{J}=\begin{bmatrix}f(\lambda_1)&0&0\\0&f(\lambda_2)&f'(\lambda_2)\\0&0&f(\lambda_2)\end{bmatrix}\Rightarrow \bar{J}=\begin{bmatrix}e&0&0\\0&e^2&e^2\\0&0&e^2\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=P\bar{J}P^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&1&0\\-1&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e&0&0\\0&e^2&e^2\\0&0&e^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&-1&-1\\-2&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-e^2&-e^2&e^2\\e-3e^2&2e-2e^2&e-2e^2\\-e+7e^2&-2e+5e^2&-e+5e^2\end{bmatrix}$$

8. 試解: $\dfrac{dx}{dt} = Ax + z$ 其中 $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $z = \begin{Bmatrix} 5e^t \\ -6e^t \end{Bmatrix}$ 。 **(10%)**

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ or } 2$$

當 $\lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$

當 $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x^1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -5 \end{Bmatrix}$

$$\therefore \quad A = SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}^{-1}$$

令 $x = Sy \Rightarrow S\dfrac{dy}{dt} = ASy + z \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = S^{-1}ASy + S^{-1}z$

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 5e^t \\ -6e^t \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + e^t \\ \dot{y}_2 = 2y_2 + e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 e^t + te^t \\ y_2 = c_2 e^{2t} - e^t \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 + 4y_2 \\ -y_1 - 5y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 e^t + 4c_2 e^{2t} + te^t - 4e^t \\ -c_1 e^t - 5c_2 e^{2t} - te^t + 5e^t \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} (c_1 - 4)e^t + 4c_2 e^{2t} + te^t \\ (-c_1 + 5)e^t - 5c_2 e^{2t} - te^t \end{Bmatrix}$$