

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 6 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ ，試問 $\det(A)$ 為何? (6%)

2. 給一矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，已知其有一特徵值為 3，試問 y 為何? (4%)

並求其它特徵值為何? (6%)

3. 給一矩陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ，試問:

(1) $\det(A) = ?$ (3%) (2) $A^{-1} = ?$ (3%) (3) 矩陣 A 為何種矩陣? (2%)

4. 已知 $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ，試求:

(1) $\det(A^T) = ?$ (2) $\det(3B^{-1}) = ?$ (3) $\det(AB) = ?$ (4) $(AB)^{-1} = ?$ (12%)

5. 已知向量集 $\{x^1, x^2, x^3\}$ ，其中 $x^1 = [1 \ 1 \ 1]^T$ ， $x^2 = [1 \ 2 \ 3]^T$ ， $x^3 = [1 \ -1 \ 3]^T$ ，試以 Gram-Schmidt 法找出其正交單位集合 $\{u^1, u^2, u^3\}$ ，並利用此集合來表示 $u = [2 \ -5 \ 6]^T$ ，即 $u = au^1 + bu^2 + cu^3$ 。(12%)

6. 給方程式 $x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2 = 12$ ，試以二次式法(quadratic form)將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2]$ ，試問其轉換矩陣為何? (5%) 判斷此方程代表何種圓錐曲線? (3%) $Q = x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2$ 為何種型式二次式 (正定、負定或是不定型)? (2%)

7. 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ，試問：

- (1) A 的特徵方程為何？ (3%)
- (2) 若 $A^{-1} = pA^2 + qA + rI$ ，則 $p = ?$ ， $q = ?$ ， $r = ?$ $A^{-1} = ?$ (8%)
- (3) 試以 Cayley-Hamilton 法計算 e^A 。(6%)
- (4) 試將化為 Jordan form，即 $A = PJP^{-1}$ (5%)
- (5) 若 $A^{-1} = P\bar{J}P^{-1}$ ，則 $\bar{J} = ?$ (5%)
- (6) 試以 Jordan form 法計算 e^A 。(5%)

8. 試解： $\frac{dx}{dt} = Ax + z$ 其中 $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ， $z = \begin{Bmatrix} 5e^t \\ -6e^t \end{Bmatrix}$ 。(10%)