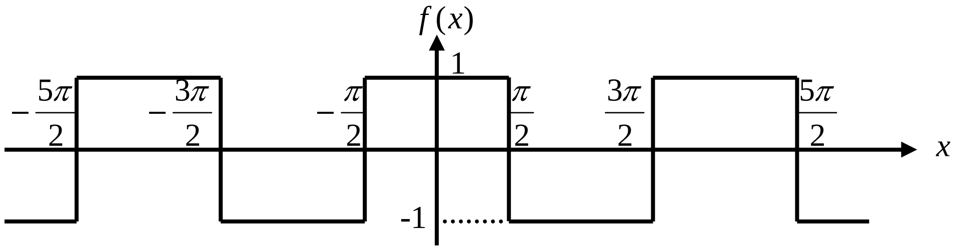
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(二) 第二次大考參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. (1) 對於 $y''+y'+\lambda y=0$ ， $y(0)=y(\ell)=0$ ，試求其特徵值與特徵函數。 (8%)
   (2) 試說明何謂函數正交。 (3%)
   (3) 試找出所對應之權重函數(weighting function)，使(1)所得之特徵函數在區間 $[0,\ell]$ 正交。 (3%)
2. 週期函數 $f(x)$ 的週期 $T=2\pi$ ，如下圖所示



   (1) 試問 $f(x)$ 為奇函數或偶函數? (2%) 並求 $f(x)$ 的傅立葉級數。 (6%)
   (2) 若 $g(x)=f(x-\frac{\pi}{2})$，試問 $g(x)$ 為奇函數或偶函數?並畫出 $g(x)$ 圖形。 (4%)
   (3) 若 $f(x)$ 的傅立葉級數為 $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_0 x)+b_n\sin(n\omega_0 x)$ ，
   而 $g(x)$ 的傅立葉級數為 $A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 x)+B_n\sin(n\omega_0 x)$ ，
   試求 $A_0,\ A_n,\ B_n$ 與 $a_0,\ a_n,\ b_n$ 之間的關係並求 $g(x)$ 的傅立葉級數。(8%)
3. 已知 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ 就其在區間 $(0,\pi)$ 之部分，全幅展開得 $g(x)$ ，半幅正弦展開得 $G(x)$，半幅餘弦展開得 $F(x)$，試問: $g(3\pi)$、$F(-\frac{5\pi}{2})$、$F(3\pi)$、$G(-\frac{5\pi}{2})$ 與 $G(3\pi)$ 之值。 (15%)
4. 已知函數 $f(x)=\cos^3 x-\sin^3 x$ ，試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。 (10%)
5. 已知若 $x>0$ 則 $f(x)=e^{-x}$，若 $x<0$ 則 $f(x)=0$，試求 $f(x)$ 之傅立葉積分 (8%)，並求 $\int_0^{\infty}\frac{\cos 2\omega+\omega\sin 2\omega}{1+\omega^2}d\omega$ 之值。 (4%)
6. (1) 試求 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$ 。 (5%)
   (2) 試求 $g(x)=xe^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$ 。 (5%)
   (3) 試將微分方程 $y''(x)+4y'(x)+4y(x)=\delta(x-1)$ 作傅立葉轉換，並求 $Y(\omega)=?$ 與 $y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=?$ (8%)
7. 已知 $u(x-a)$ 為單位步階函數，即 $u(x-a)=\begin{cases}1, & x>a\\ 0, & x<a\end{cases}$ $(a>0)$
   (1) 請畫出 $p(x)=u(x+a)-u(x-a)$ 之圖形，並求其傅立葉轉換 $P(\omega)$ 。 (3%)
   (2) 試求 $\mathcal{F}^{-1}[\frac{2\sin\omega\cos\omega}{2\omega+i\omega^2}]=?$ (8%)

傳立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傳立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傳立葉積分： $f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx,\quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

傳立葉複數形式級數展開

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}\,,\quad \text{其中 } \omega_n=\frac{2n\pi}{T},\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,e^{-i\omega_n x}\,dx$$

傳立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傳立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傳立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2 dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega$

Convolution : $f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式: $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\beta\sin\alpha$

參考解答:

1. (1) **對於** $y''+y'+\lambda y=0$ **，** $y(0)=y(\ell)=0$ **，試求其特徵值與特徵函數。 (8%)**

(2) 試說明何謂函數正交。 (3%)

(3) 試找出所對應之權重函數(weighting function)，使(1)所得之特徵函數在區間$[0,\ell]$**正交。 (3%)**

(1) 令 $y=e^{\mu x}$ 帶入 ODE 可得 $(\mu^2+\mu+\lambda)e^{\mu x}=0 \quad \Rightarrow \mu^2+\mu+\lambda=0$

$$\Rightarrow \mu=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}$$

(a) 令 $\lambda=\frac{1}{4}-k^2 \quad \Rightarrow y(x)=e^{-\frac{x}{2}}(c_1\cosh kx+c_2\sinh kx)$

由 $y(0)=0 \;\Rightarrow c_1=0$

$y(\ell)=0 \;\Rightarrow c_2=0$

(b) 令 $\lambda=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow y(x)=e^{-\frac{x}{2}}(c_1+c_2x)$

由 $y(0)=0 \;\Rightarrow c_1=0$

$y(\ell)=0 \;\Rightarrow c_2=0$

(c) 令 $\lambda=\frac{1}{4}+k^2 \quad \Rightarrow y(x)=e^{-\frac{x}{2}}(c_1\cos kx+c_2\sin kx)$

由 $y(0)=0 \;\Rightarrow c_1=0$

$y(\ell)=0 \;\Rightarrow c_2\sin k\ell=0$

$\therefore$ 可知其為 $\sin k\ell=0 \;\Rightarrow k=\frac{n\pi}{\ell} \;\; (n=1,2,3,\cdots\cdots)$

故特徵值為 $\lambda_n=\frac{1}{4}+(\frac{n\pi}{\ell})^2$

特徵函數為 $y_n(x)=e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{n\pi x}{\ell} \;\; (n=1,2,3,\cdots\cdots)$

(2) 若某組函數 $\phi_m(x)$ 具有下述特性

$$<\phi_m,\phi_n>=\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx \begin{cases} =0 & if\ m\neq n \\ \neq 0 & if\ m=n \end{cases}$$

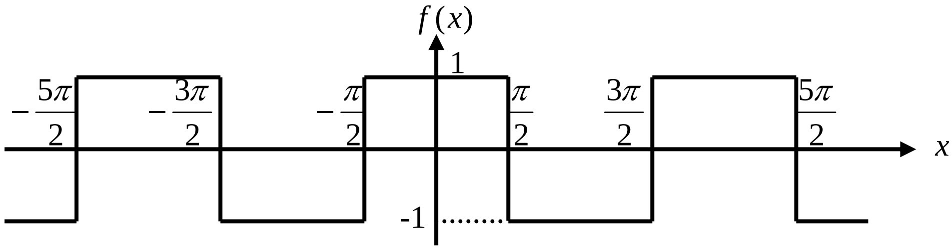
則稱此組函數在區間 $[a,b]$ 上正交。

(3) $$<\sin\frac{m\pi x}{\ell},\sin\frac{n\pi x}{\ell}>=\int_0^\ell \sin\frac{m\pi x}{\ell}\cdot\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \begin{cases} =0 & if\ m\neq n \\ \neq 0 & if\ m=n \end{cases}$$

$\therefore$ 由廣義正交函數可知 $\int_0^\ell \rho(x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{m\pi x}{\ell}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \begin{cases} =0 & if\ m\neq n \\ \neq 0 & if\ m=n \end{cases}$

當權重函數 $\rho(x)=e^x$ 上式能滿足正交關係

2. 週期函數 $f(x)$ 的週期 $T=2\pi$，如下圖所示



(1) 試問 $f(x)$ 為奇函數或偶函數? **(2%)** 並求 $f(x)$ 的傅立葉級數。 **(6%)**

(2) 若 $g(x)=f(x-\frac{\pi}{2})$，試問 $g(x)$ 為奇函數或偶函數?並畫出 $g(x)$ 圖形。 **(4%)**

(3) 若 $f(x)$ 的傅立葉級數為 $a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega_0 x)+b_n\sin(n\omega_0 x)$，

而 $g(x)$ 的傅立葉級數為 $A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega_0 x)+B_n\sin(n\omega_0 x)$，

試求 $A_0,\ A_n,\ B_n$ 與 $a_0,\ a_n,\ b_n$ 之間的關係並求 $g(x)$ 的傅立葉級數。**(8%)**

(1) $\because\ f(x)=f(-x)$

$\therefore$ 此為偶函數

由圖可知 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<-\frac{\pi}{2},\\ 1, & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2},\\ -1, & \frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2},\end{cases}$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}$$

$b_n=0$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\,dx)=0$$

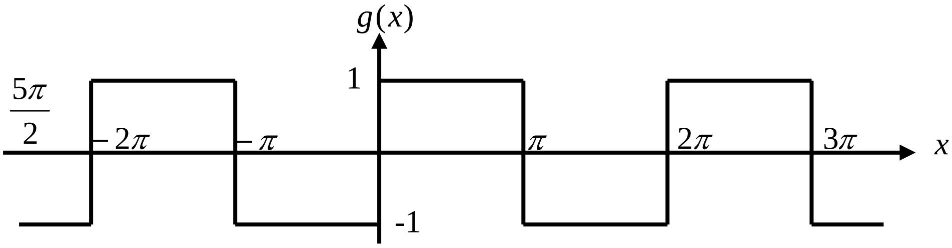
$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx=\frac{2}{\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\,dx)$$

$$=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}\frac{4}{n\pi}, & n=1,5,9,\cdots\\ \frac{-4}{n\pi}, & n=3,7,11,\cdots\\ 0, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{2n}=0,\ \ a_{2n-1}=\frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$$

(2)



由圖可看出此為奇函數

(3) $g(x)=f(x-\frac{\pi}{2})=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)(x-\frac{\pi}{2})$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\sin(2n-1)x\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x$$

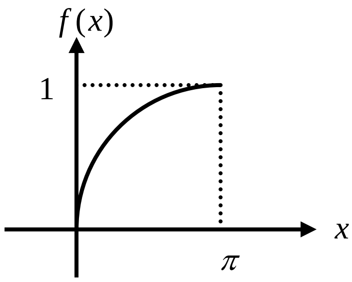
$A_0=a_0=0$

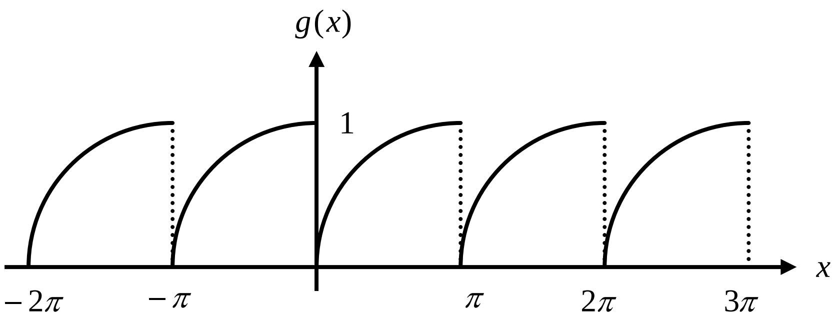
$A_{2n}=B_{2n}=a_{2n}=b_{2n-1}=b_{2n}=0$

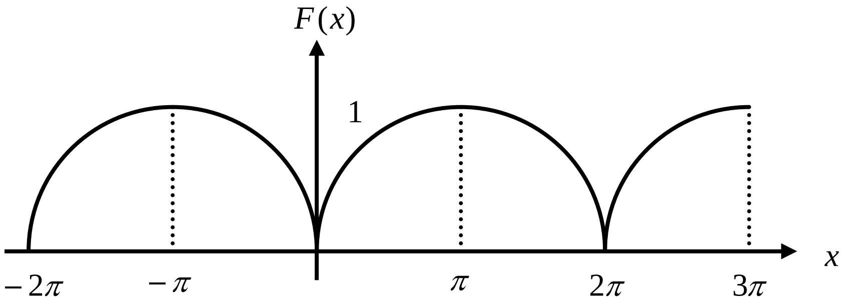
$A_{2n-1}=a_{2n-1}\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cdot\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}=0$

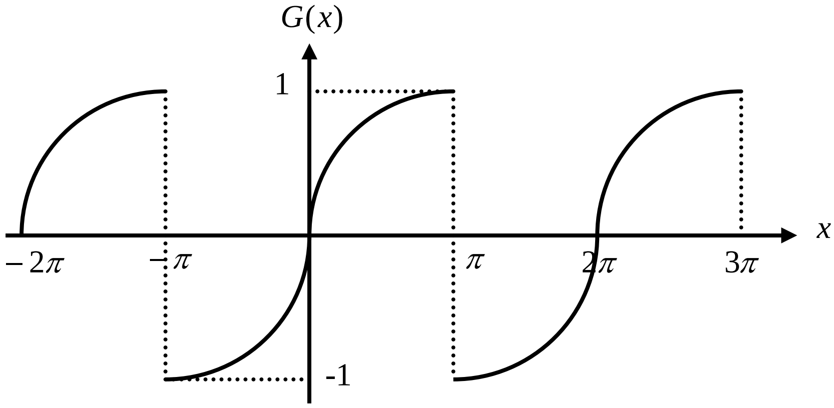
$B_{2n-1}=a_{2n-1}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}=\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}=\frac{1}{2n-1}$

3. 已知 $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ **就其在區間** $(0,\pi)$ **之部分，全幅展開得** $g(x)$ **，半幅正弦展開得** $G(x)$ **，半幅餘弦展開得** $F(x)$ **，試問：** $g(3\pi)$ 、 $F(-\frac{5\pi}{2})$ 、 $F(3\pi)$ 、 $G(-\frac{5\pi}{2})$ **與** $G(3\pi)$ **之值。 (15%)**









$$g(x)=g(x+\pi)\quad \Rightarrow g(3\pi)=\frac{1}{2}[g(3\pi^-)+g(3\pi^+)]=\frac{1}{2}$$

$F(x)=F(x+2\pi)$ 又 $F(-x)=F(x)$

$$\therefore\quad F(-\frac{5\pi}{2})=F(-\frac{\pi}{2})=F(\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$F(3\pi)=F(\pi)=\sin(\frac{\pi}{2})=1$$

$G(x)=G(x+2\pi)$ 又 $G(-x)=-G(x)$

$$\therefore\quad G(-\frac{5\pi}{2})=G(-\frac{\pi}{2})=-G(\frac{\pi}{2})=-\sin(\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$G(3\pi)=G(\pi)=\frac{1}{2}[G(\pi^-)+G(\pi^+)]=0$$

4. 已知函數 $f(x)=\cos^3 x-\sin^3 x$，試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。 (10%)

此函數之週期為 2π

由傅立葉級數: $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

又 $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x \quad \Rightarrow \cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$

$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x \quad \Rightarrow \sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$

$$f(x)=\cos^3 x-\sin^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x-\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{4}\sin 3x$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

比較係數後可得: $a_0=a_n=b_n=0\ \ (n\neq 1,3)$,

$$a_1=\frac{3}{4},\ \ a_3=\frac{1}{4},\ \ b_1=-\frac{3}{4},\ \ b_3=\frac{1}{4}$$

5. 已知若 $x>0$ 則 $f(x)=e^{-x}$，若 $x<0$ 則 $f(x)=0$，試求 $f(x)$ 之傅立葉積分 (8%)，並求 $\int_0^\infty \frac{\cos 2\omega+\omega\sin 2\omega}{1+\omega^2}d\omega$ 之值。 (4%)

$$f(x)=\int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

且 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+\omega^2}$

$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\cos\omega x\,d\omega=\frac{1}{\pi}\frac{\omega}{1+\omega^2}$

$$\therefore\ f(x)=\int_0^\infty [A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{1+\omega^2}d\omega$$

$$\therefore\ \int_0^\infty \frac{\cos 2\omega+\omega\sin 2\omega}{1+\omega^2}d\omega=\pi\cdot f(2)=\pi\cdot e^{-2}$$

6. (1) 試求 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$。 (5%)

(2) 試求 $g(x)=xe^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$。 (5%)

(3) 試將微分方程 $y''(x)+4y'(x)+4y(x)=\delta(x-1)$ 作傅立葉轉換，並求 $Y(\omega)=?$ 與 $y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=?$ (8%)

(1) $\mathcal{F}[f(x)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax}\cdot u(x)e^{-i\omega x}\,dx=\int_0^\infty e^{-(a+i\omega)x}\,dx$

$$=-\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{a+i\omega}$$

(2) $G(\omega)=\mathcal{F}[g(x)]=\mathcal{F}[x\cdot f(x)]=i\frac{d}{d\omega}F(\omega)=i\frac{d}{d\omega}(\frac{1}{a+i\omega})=\frac{1}{(a+i\omega)^2}$

(3) $\mathcal{F}[y''(x)+4y'(x)+4y(x)]=\mathcal{F}[\delta(x-1)]$

$\Rightarrow (i\omega)^2Y(\omega)+4i\omega Y(\omega)+4Y(\omega)=e^{-i\omega}$

$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{e^{-i\omega}}{-\omega^2+4i\omega+4}$

$$y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{e^{-i\omega}}{-\omega^2+4i\omega+4}]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{e^{-i\omega}}{(i\omega+2)^2}]=\mathcal{F}^{-1}[e^{-i\omega}G(\omega)]$$

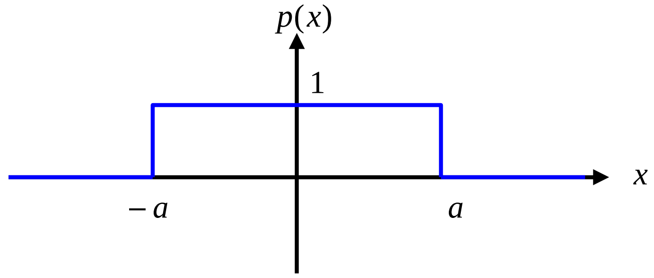
$$=(x-1)e^{-2(x-1)}\cdot u(x-1)$$

7. 已知$u(x-a)$為單位步階函數，即 $u(x-a)=\begin{cases}1, & x>a\\ 0, & x<a\end{cases}$ **(**$a>0$**)**

(1) 請畫出 $p(x)=u(x+a)-u(x-a)$之圖形，並求其傅立葉轉換$P(\omega)$。 **(3%)**

(2) 試求$\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{2\sin\omega\cos\omega}{2\omega+i\omega^2}]=?$ **(8%)**

(1)



$$P(\omega)=\mathcal{F}[p(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e^{-i\omega x}\,dx=\int_{-a}^{a}e^{-i\omega x}\,dx=2\int_{0}^{a}\cos\omega x\,dx=\frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$

(2)
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\frac{2\sin\omega\cos\omega}{2\omega+i\omega^2}]&=\mathcal{F}^{-1}[\frac{\sin 2\omega}{\omega}\cdot\frac{1}{2+i\omega}]\\
&=\mathcal{F}^{-1}[\frac{\sin 2\omega}{\omega}]*\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{2+i\omega}]\\
&=\frac{1}{2}\left[u(x+2)-u(x-2)\right]*\left[e^{-2x}\cdot u(x)\right]\\
&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(\tau+2)-u(\tau-2)\right]\cdot e^{-2(x-\tau)}\cdot u(x-\tau)\,d\tau\\
&=\frac{1}{2}e^{-2x}u(x+2)\int_{-2}^{x}e^{2\tau}d\tau-\frac{1}{2}e^{-2x}u(x-2)\int_{2}^{x}e^{2\tau}d\tau\\
&=\frac{1}{4}u(x+2)\left[1-e^{-2(x+2)}\right]-\frac{1}{4}u(x-2)\left[1-e^{-2(x-2)}\right]
\end{aligned}$$