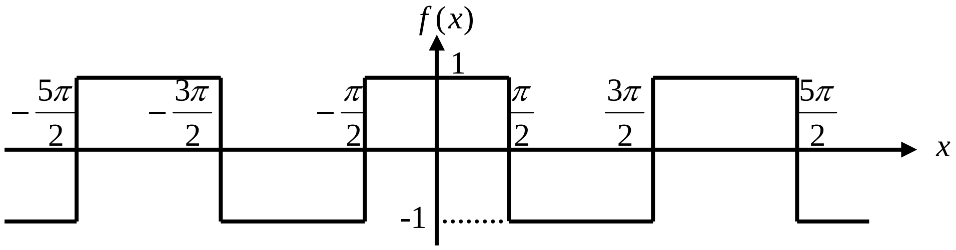
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(二) 第二次大考

系級：________________ 學號：______________ 姓名：_____________

1. (1) 對於 $y'' + y' + \lambda y = 0$，$y(0) = y(\ell) = 0$，試求其特徵值與特徵函數。 (8%)
   (2) 試說明何謂函數正交。 (3%)
   (3) 試找出所對應之權重函數(weighting function)，使(1)所得之特徵函數在區間 $[0, \ell]$ 正交。 (3%)
2. 週期函數 $f(x)$ 的週期 $T = 2\pi$，如下圖所示



   (1) 試問 $f(x)$ 為奇函數或偶函數? (2%) 並求 $f(x)$ 的傅立葉級數。 (6%)
   (2) 若 $g(x) = f(x - \frac{\pi}{2})$，試問 $g(x)$ 為奇函數或偶函數?並畫出 $g(x)$ 圖形。 (4%)
   (3) 若 $f(x)$ 的傅立葉級數為 $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x)$，
   而 $g(x)$ 的傅立葉級數為 $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 x) + B_n \sin(n\omega_0 x)$，
   試求 A_0, A_n, B_n 與 a_0, a_n, b_n 之間的關係並求 $g(x)$ 的傅立葉級數。(8%)
3. 已知 $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ 就其在區間 $(0, \pi)$ 之部分，全幅展開得 $g(x)$，半幅正弦展開得 $G(x)$，半幅餘弦展開得 $F(x)$，試問: $g(3\pi)$、$F(-\frac{5\pi}{2})$、$F(3\pi)$、$G(-\frac{5\pi}{2})$ 與 $G(3\pi)$ 之值。 (15%)
4. 已知函數 $f(x) = \cos^3 x - \sin^3 x$，試求 $f(x)$ 的傅立葉級數展開。 (10%)
5. 已知若 $x > 0$ 則 $f(x) = e^{-x}$，若 $x < 0$ 則 $f(x) = 0$，試求 $f(x)$ 之傅立葉積分 (8%)，並求 $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\omega + \omega \sin 2\omega}{1+\omega^2} d\omega$ 之值。 (4%)
6. (1) 試求 $f(x) = e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a > 0$。 (5%)
   (2) 試求 $g(x) = xe^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a > 0$。 (5%)
   (3) 試將微分方程 $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = \delta(x-1)$ 作傅立葉轉換，並求 $Y(\omega) = ?$ 與 $y(x) = \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = ?$ (8%)
7. 已知 $u(x-a)$ 為單位步階函數，即 $u(x-a) = \begin{cases} 1, & x > a \\ 0, & x < a \end{cases}$ $(a > 0)$
   (1) 請畫出 $p(x) = u(x+a) - u(x-a)$ 之圖形，並求其傅立葉轉換 $P(\omega)$。 (3%)
   (2) 試求 $\mathcal{F}^{-1}[\frac{2\sin\omega\cos\omega}{2\omega + i\omega^2}] = ?$ (8%)

傅立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傅立葉積分： $f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx,\quad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x},\quad \text{其中 } \omega_n=\frac{2n\pi}{T},\quad c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$$

傅立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2d\omega$

Convolution : $f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega)$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式: $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, $\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\beta\sin\alpha$