國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(二) 第一次大考參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 給一向量場 $\vec{F}(x,y,z)=xz\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$ ，試求其旋度與散度? (6%)

2. 矩形盒子的溫度約為

   $T(x,y,z)=xyz(1-x)(2-y)(3-z)$，$0\le x\le 1$，$0\le y\le 2$，$0\le z\le 3$

   若有一隻蚊子位於$(\frac{1}{2},1,1)$，它應該飛往哪個方向才能夠儘快的降溫? (9%)

3. 曲線 C 是由 $x=4\cos t$，$y=4\sin t$，$0\le t\le \frac{\pi}{2}$ 所定義的四分之一圓，如圖一所示。試計算 (1)$\int_C xy^2\,dx$ (5%) (2)$\int_C xy^2\,dy$ (5%) (3)$\int_C xy^2\,ds$ (5%)

4. (1) 請證明積分 $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C (2x\,dx+2y\,dy+4z\,dz)$ 在空間中任意定義域內與路徑無關 (5%)

   (2) 試求(1)之積分式由 $A(0,0,0)$ 至 $B(2,2,2)$ 的積分值? (5%)

5. $I=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C (x^2y\,dx+2xy^2\,dy)$ 其中 C 為沿著直線從 $(0,0)$ 至 $(1,b)$ 其中 $0\le b\le 1$，然後再垂直向上至 $(1,1)$，請問當 b 為多少時，I 值為最大，其值為何? (10%)

6. 給一擺線如圖二。$\vec{r}(t)=a(t-\sin t)\vec{i}+a(1-\cos t)\,\vec{j}$ ，其中 $a>0$ 且 $0\le t\le 2\pi$

   (1) 試計算擺線之弧長。 (6%)

   (2) 給定 $P=-y$ 與 $Q=x$，試由格林定理來求擺線與 x 軸所交之面積。 (6%)

   (3) 試求在 $t=\pi$ 之曲率 κ。 (6%)

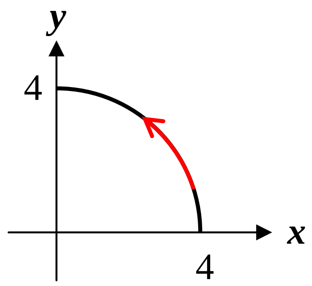
7. 令 S 為圓柱體 $z=1-x^2$ 在 $0\le x\le 1, -2\le y\le 2$ 的一部份，如圖三所示。

   若 $\vec{F}=xy\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+xz\,\vec{k}$ ，試驗證史托克斯(Stokes)定理。

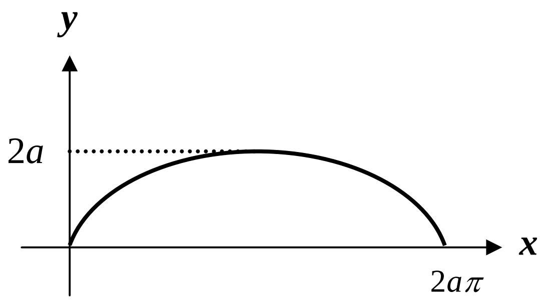
   (1) 直接以面積分計算。(8%) (2) 直接以線積分計算。(8%)

8. 令 D 為由半球 $x^2+y^2+(z-1)^2=9$，$1\le z\le 4$ 與平面 $z=1$ 所包圍的區域，如圖四所示。若 $\vec{F}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+(z-1)\vec{k}$ ，試驗證散度定理。

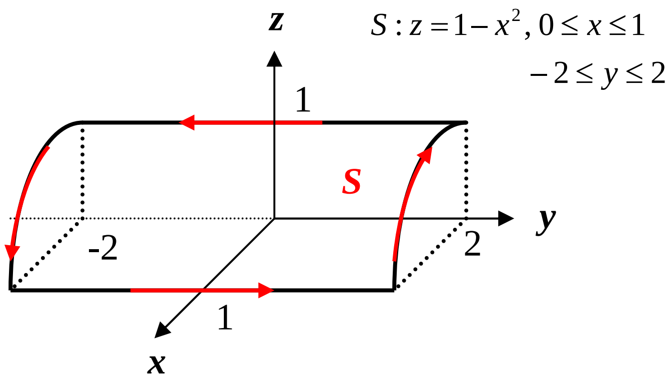
   (1) 直接以體積分計算。(8%) (2) 直接以面積分計算。(8%)



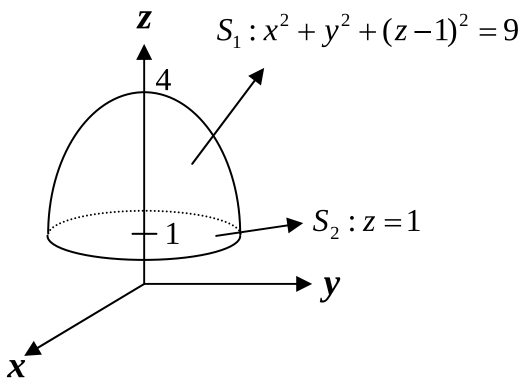
圖一



圖二



圖三



圖四

Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla \cdot \vec{F}\, dV = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$ **(3D)**

$$\iint \nabla \cdot \vec{F}\, dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds \quad \textbf{(2D)}$$

格林定理: $\int P\,dx + Q\,dy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy$

Stokes 旋度定理: $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

曲率: $\kappa = \dfrac{|y''(x)|}{[1 + (y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率:** $\tau = \left| \dfrac{d(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}{ds} \right|$

二倍角公式: $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}$**,** $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}$

圓球體積: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ **圓球表面積:** $S = 4\pi r^2$

$z = f(x, y) \quad \vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$

$dA = \left| \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right| dxdy = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dxdy$

參考解答:

1. 給一向量場 $\vec{F}(x,y,z)=xz\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$，試求其旋度與散度? (6%)

旋度 $\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz & yz & xy\end{vmatrix}=(x-y)\,\vec{i}+(x-y)\,\vec{j}$

散度 $\nabla\cdot\vec{F}=\dfrac{\partial(xz)}{\partial x}+\dfrac{\partial(yz)}{\partial y}+\dfrac{\partial(xy)}{\partial z}=2z$

2. 矩形盒子的溫度約為

$T(x,y,z)=xyz(1-x)(2-y)(3-z)$，$0\le x\le 1$，$0\le y\le 2$，$0\le z\le 3$

若有一隻蚊子位於 $(\frac{1}{2},1,1)$，它應該飛往哪個方向才能夠儘快的降溫? (9%)

$$\nabla T=\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial T}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}$$
$$=yz(1-2x)(2-y)(3-z)\,\vec{i}+xz(1-x)(2-2y)(3-z)\,\vec{j}$$
$$+xy(1-x)(2-y)(3-2z)\,\vec{k}$$

$$\therefore\ \nabla T(\frac{1}{2},1,1)=\frac{1}{4}\vec{k}$$

若要以最快速度降溫，則蚊子應該朝向 $-\dfrac{1}{4}\vec{k}$ 的方向飛行

3. 曲線 C 是由 $x=4\cos t$，$y=4\sin t$，$0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ 所定義的四分之一圓，如圖一所示。試計算 (1) $\int_C xy^2\,dx$ (5%) (2) $\int_C xy^2\,dy$ (5%) (3) $\int_C xy^2\,ds$ (5%)

$$x=4\cos t\quad\Rightarrow dx=-4\sin t\,dt$$
$$y=4\sin t\quad\Rightarrow dy=4\cos t\,dt$$
$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\ dt=4\,dt$$

(1) $\displaystyle\int_C xy^2\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos t\cdot(4\sin t)^2\cdot(-4\sin t\,dt)$

$$=-256\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,d(\sin t)$$

$$=-256\cdot(\frac{1}{4}\sin^4 t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-64$$

(2) $\int_C xy^2\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos t\cdot(4\sin t)^2\cdot(4\cos t\,dt)$

$$= 64\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt$$

$$= 64\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt$$

$$= 16\pi$$

(3) $\int_C xy^2\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos t\cdot(4\sin t)^2\,4dt$

$$= 256\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,d(\sin t)$$

$$= \frac{256}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{256}{3}$$

4. (1) 請證明積分 $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C (2x\,dx + 2y\,dy + 4z\,dz)$ **在空間中任意定義域內與路徑無關 (5%)**

(2) 試求(1)之積分式由 $A(0, 0, 0)$ **至** $B(2, 2, 2)$ **的積分值? (5%)**

(1) $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int_C (2x\,dx + 2y\,dy + 4z\,dz)$$

$$\Rightarrow P = 2x,\ \ Q = 2y,\ \ R = 2z$$

又 $\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & 2y & 4z \end{vmatrix} = 0$

故可知此為保守場

所以積分值與積分路徑無關，只與起點終點有關。

(2) $\nabla\phi = -\vec{F} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$

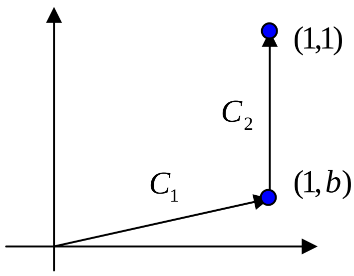
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = -2x \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2y \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = -4z \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \phi = -x^2 + f_1(y,z) \\ \phi = -y^2 + f_2(x,z) \\ \phi = -2z^2 + f_3(x,y) \end{cases}$$

$\therefore$ 比較後可得 $\phi(x,y,z) = -x^2 - y^2 - 2z^2 + c$

由 $A(0,0,0)$ 至 $B(2,2,2)$ 的積分值為

$\phi(0,0,0) - \phi(2,2,2) = 4 + 4 + 8 = 16$

5. $I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (x^2 y\,dx + 2xy^2\,dy)$ **沿著直線線段從** $(0,0)$ **積分至** $(1,b)$ **、** $0 \le b \le 1$ **，然後再垂直向上至** $(1,1)$ **，請問當** b **為多少時，** I **值為最大，其值為何? (10%)**



$C_1 : x = t,\ \ y = tb \ \ (t = 0 \to 1) \quad \Rightarrow dx = dt, dy = bdt$

$C_2 : x = 1,\ \ y = b \to 1$

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^1 (t^2 \cdot tb\,dt + 2t \cdot t^2 b^2 \cdot bdt) + \int_b^1 2y^2 dy$$

$$= \frac{1}{4}(b + 2b^3) + \frac{2}{3}(1 - b^3)$$

$$= -\frac{1}{6}b^3 + \frac{1}{4}b + \frac{2}{3}$$

I 之極值可由 $\dfrac{dI}{db} = 0 \quad \Rightarrow b = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow I = \dfrac{1}{6\sqrt{2}} + \dfrac{2}{3}$

6. **給一擺線如圖二。** $\vec{r}(t) = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j}$ **，其中** $a > 0$ **且** $0 \le t \le 2\pi$

(1) 試計算擺線之弧長。 (6%)

(2) 給定 $P = -y$ **與** $Q = x$ **，試由格林定理來求擺線與** x **軸所交之面積。 (6%)**

(3) 試求在 $t = \pi$ **之曲率** κ **。 (6%)**

$\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j}$

$\therefore \quad x = a(t - \sin t) \quad \Rightarrow dx = a(1 - \cos t)\,dt$

$\quad\ \ y = a(1 - \cos t) \quad \Rightarrow dy = a \sin t\,dt$

$$S=\int ds=\int |d\vec{r}|=\int \sqrt{dx^2+dy^2}=\int \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\ dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\ dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\ dt$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\ dt$$

$$=-4a\cdot\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}$$

$$=8a$$

(2) $\oint -ydx+xdy=2\iint dxdy=2A$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\oint -ydx+xdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}[-a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt+a(t-\sin t)\cdot a\sin tdt]$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{0}(-1+2\cos t-\cos^2 t+t\sin t-\sin^2 t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{2\pi}^{0}(-2+2\cos t+t\sin t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}(-2t+2\sin t-t\cos t+\sin t)\Big|_{2\pi}^{0}$$

$$=-\frac{a^2}{2}(-4\pi-2\pi)$$

$$=3\pi a^2$$

(3) $\vec{r}'(t)=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

$\vec{r}''(t)=x''\vec{i}+y''\vec{j}$

$$\kappa=\frac{|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t)\cdot\vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|x'y''-x''y'|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$x=a(t-\sin t)\quad\Rightarrow x'=\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)\quad\Rightarrow x''=\frac{d^2x}{dt^2}=a\sin t$$

$$y=a(1-\cos t)\quad\Rightarrow y'=\frac{dy}{dt}=a\sin t\quad\Rightarrow y''=\frac{d^2y}{dt^2}=a\cos t$$

$$\kappa=\frac{|x'y''-x''y'|}{[(x')^2+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|a(1-\cos t)\cdot a\cos t-a\sin t\cdot a\sin t|}{[a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{a^2(1-\cos t)}{a^3(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\,a(1-\cos t)^{\frac{1}{2}}}$$

將 $t=\pi$ 代入，可得 $\kappa=\dfrac{1}{4a}$

7. 令 S 為圓柱體 $z=1-x^2$ 在 $0\le x\le 1,-2\le y\le 2$ 的一部份，如圖三所示。

若 $\vec{F}=xy\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+xz\,\vec{k}$，試驗證史托克斯(Stokes)定理。

(1) 直接以面積分計算。(8%) **(2) 直接以線積分計算。(8%)**

(1) $\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & yz & xz\end{vmatrix}=-y\,\vec{i}-z\,\vec{j}-x\vec{k}$

令 $\phi=z+x^2-1=0 \quad \Rightarrow \vec{n}=\dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}=\dfrac{2x\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{4x^2+1}}$

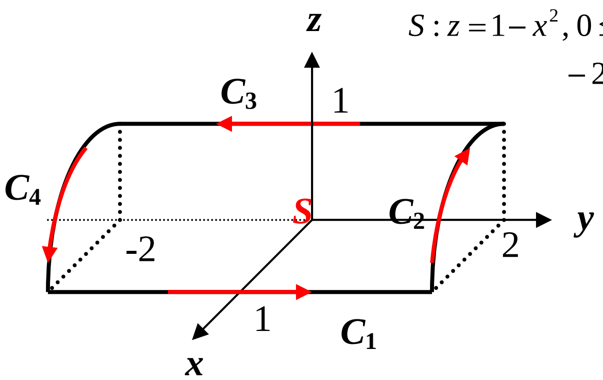
又 $z=f(x,y) \quad \Rightarrow \vec{r}(x,y)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\vec{k}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+f(x,y)\,\vec{k}$

$$dA=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right|dxdy=\sqrt{4x^2+1}\,dxdy$$

$$\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\iint(-y\vec{i}-z\vec{j}-x\vec{k})\cdot\frac{2x\vec{i}+\vec{k}}{\sqrt{4x^2+1}}\cdot\sqrt{4x^2+1}\,dxdy$$

$$=\int_0^1\int_{-2}^{2}(-2xy-x)\,dydx=-2$$

(2)



$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_4} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

C_1: $x=1$, $y=-2\to 2$, $z=0$ $\Rightarrow$ $dx=0$, $dz=0$

C_2: $x=1\to 0$, $y=2$, $z=1-x^2$ $\Rightarrow$ $dy=0$, $dz=-2xdx$

C_3: $x=0$, $y=2\to -2$, $z=1$ $\Rightarrow$ $dx=0$, $dz=0$

C_4: $x=0\to 1$, $y=-2$, $z=1-x^2$ $\Rightarrow$ $dy=0$, $dz=-2xdx$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = xy\,dx + yz\,dy + xz\,dz$$

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{C_4} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= 0 + \int_1^0 [2x + x(1-x^2)\cdot(-2x)]\,dx + \int_2^{-2} y\,dy$$

$$+ \int_0^1 [-2x + x(1-x^2)\cdot(-2x)]\,dx$$

$$= 0 - \frac{11}{15} + 0 - \frac{19}{15} = -2$$

8. 令 D 為由半球 $x^2+y^2+(z-1)^2=9$，$1\le z\le 4$ 與平面 $z=1$ 所包圍的區域，如圖四所示。若 $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+(z-1)\vec{k}$ ，試驗證散度定理。

(1) 直接以體積分計算。(8%)　　**(2) 直接以面積分計算。(8%)**

(1) $\nabla\cdot\vec{F} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial (z-1)}{\partial z} = 3$

$$\iiint \nabla\cdot\vec{F}\,dV = 3\iiint dV = 3\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot 3^3 = 54\pi$$

(2) $\displaystyle\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA + \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$

S_2: $\vec{n}=-\vec{k}$ $\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{n}=0$

S_1: $\phi = x^2+y^2+(z-1)^2-9=0$ $\Rightarrow \vec{n} = \dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \dfrac{2x\vec{i}+2y\vec{j}+2(z-1)\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+4(z-1)^2}}$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+(z-1)\vec{k}}{3}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{(z-1)^2}{3} = 3$$

$$z = f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2} + 1$$

$$\Rightarrow \vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}$$

$$dA = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right| dxdy = \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\, dxdy$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\right)^2 + 1}\, dxdy$$

$$= \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\, dxdy$$

$$\oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\; dA = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\; dA + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\; dA$$

$$= \iint 3 \cdot \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\, dxdy + 0$$

$$= 9 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)^{-\frac{1}{2}}\, r dr d\theta$$

$$= -\frac{9}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(9 - r^2) d\theta$$

$$= -9 \int_0^{2\pi} (9 - r^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^3\, d\theta$$

$$= 27 \int_0^{2\pi} d\theta = 54\pi$$