# 國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(二) 第一次大考

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 給一向量場 $\vec{F}(x,y,z)=xz\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$，試求其旋度與散度? (6%)

2. 矩形盒子的溫度約為

   $T(x,y,z)=xyz(1-x)(2-y)(3-z)$，$0\le x\le 1$，$0\le y\le 2$，$0\le z\le 3$

   若有一隻蚊子位於$(\frac{1}{2},1,1)$，它應該飛往哪個方向才能夠儘快的降溫? (9%)

3. 曲線 $C$ 是由 $x=4\cos t$，$y=4\sin t$，$0\le t\le \frac{\pi}{2}$ 所定義的四分之一圓，如圖一所示。試計算 (1)$\int_C xy^2\,dx$ (5%)　(2)$\int_C xy^2\,dy$ (5%)　(3)$\int_C xy^2\,ds$ (5%)

4. (1) 請證明積分 $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C (2x\,dx+2y\,dy+4z\,dz)$ 在空間中任意定義域內與路徑無關 (5%)

   (2) 試求(1)之積分式由 $A(0,0,0)$ 至 $B(2,2,2)$ 的積分值? (5%)

5. $I=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C (x^2y\,dx+2xy^2\,dy)$ 其中 $C$ 為沿著直線從 $(0,0)$ 至 $(1,b)$ 其中 $0\le b\le 1$，然後再垂直向上至 $(1,1)$，請問當 $b$ 為多少時，$I$ 值為最大，其值為何? (10%)

6. 給一擺線如圖二。$\vec{r}(t)=a(t-\sin t)\vec{i}+a(1-\cos t)\vec{j}$，其中 $a>0$ 且 $0\le t\le 2\pi$

   (1) 試計算擺線之弧長。 (6%)

   (2) 給定 $P=-y$ 與 $Q=x$，試由格林定理來求擺線與 $x$ 軸所交之面積。 (6%)

   (3) 試求在 $t=\pi$ 之曲率 $\kappa$。 (6%)

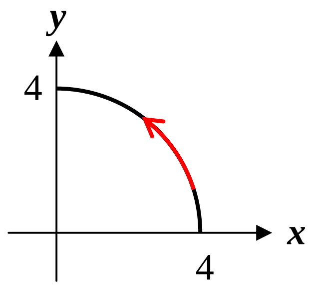
7. 令 $S$ 為圓柱體 $z=1-x^2$ 在 $0\le x\le 1,-2\le y\le 2$ 的一部份，如圖三所示。

   若 $\vec{F}=xy\,\vec{i}+yz\,\vec{j}+xz\,\vec{k}$，試驗證史托克斯(Stokes)定理。

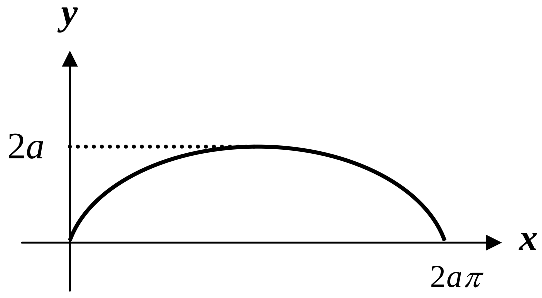
   (1) 直接以面積分計算。(8%)　　(2) 直接以線積分計算。(8%)

8. 令 $D$ 為由半球 $x^2+y^2+(z-1)^2=9$，$1\le z\le 4$ 與平面 $z=1$ 所包圍的區域，如圖四所示。若 $\vec{F}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+(z-1)\vec{k}$，試驗證散度定理。

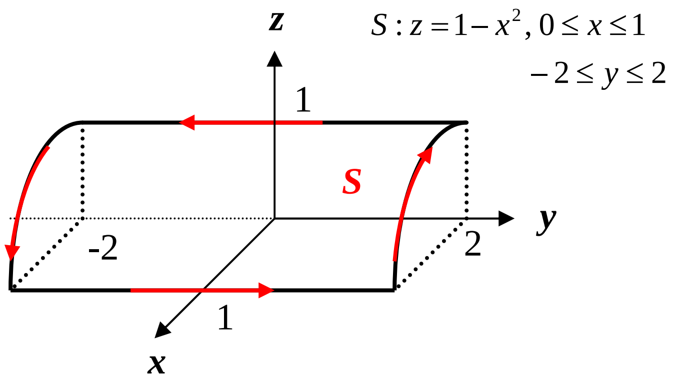
   (1) 直接以體積分計算。(8%)　　(2) 直接以面積分計算。(8%)



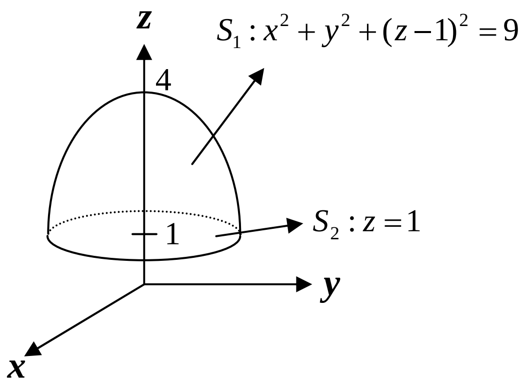

圖一




圖二




圖三




圖四

**Hint:**

**Gauss 散度定理:** $\iiint \nabla \cdot \vec{F}\ dV = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\ dA$ **(3D)**

$$\iint \nabla \cdot \vec{F}\ dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}\ ds \quad \textbf{(2D)}$$

**格林定理:** $\int P\,dx + Q\,dy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$

**Stokes 旋度定理:** $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\ dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

**曲率:** $\kappa = \frac{|y''(x)|}{[1+(y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}}$ **扭率:** $\tau = \left|\frac{d(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}{ds}\right|$

**二倍角公式:** $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$**,** $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

**圓球體積:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ **圓球表面積:** $S = 4\pi r^2$

$z = f(x,y) \quad \vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}$

$$dA = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right| dxdy = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\,dxdy$$