國立臺灣海洋大學河海工程學系 2020 工程數學(二) 期末考

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. 試求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換為何? (16%)

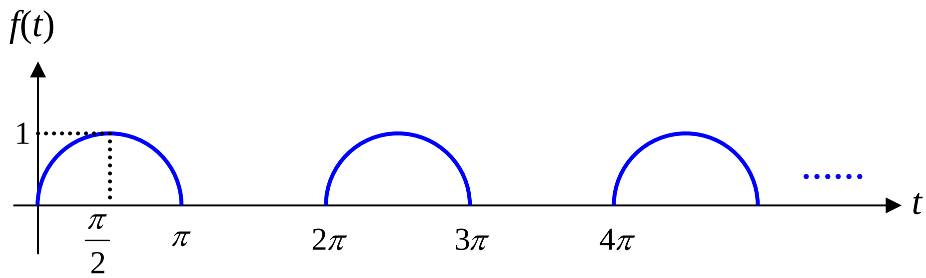
   (1) $f(t)=(1+t)e^{2t}$ (2) $f(t)=\cosh t\cdot\sin 2t$ (3) $f(t)=t\sin 2t$ (4) $f(t)=\dfrac{1}{t}\sin t$

2. 試求下列 $F(s)$ 的拉普拉斯逆轉換為何? (32%)

   (1) $F(s)=e^{-s}$ (2) $F(s)=\dfrac{3}{s}$ (3) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s-a)}$ (4) $F(s)=\dfrac{1}{(s-a)^3}$

   (5) $F(s)=\dfrac{s^2+s}{s^2+4}$ (6) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+s}$ (7) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+6s+10}$ (8) $F(s)=\ln\dfrac{s+1}{s-2}$

3. 請計算下圖函數 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換 $F(s)$。(10%)



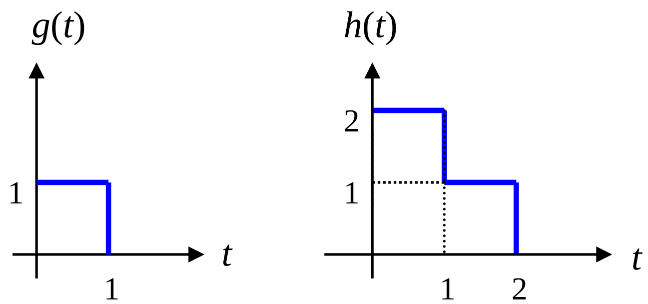
4. 單位步階函數(unit step function)定義為

$$u(t-a)=\begin{cases}1, & t>a\\ 0, & t<a\end{cases}\qquad \text{其中 } a \text{ 為常數}$$

   (1) 試將下圖函數 $g(t)$ 與 $h(t)$ 以單位步階函數表示。 (6%)

   (2) 試求 $g(t)$ 與 $h(t)$ 之拉普拉斯轉換 $G(s)$ 與 $H(s)$。 (6%)

   (3) 已知 $F(s)=G(s)\cdot H(s)$ 又 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$，試求 $f(t)$ 並繪其圖形。 (10%)



5. 試以拉普拉斯轉換法求解下述微分方程式:

   (1) $y''+4y'+5y=\delta(t-1)$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$ (10%)

   (2) $y''+y-4\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau=e^{-2t}$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$ (10%)

6. 試求解下述聯立微分方程組 (10%)

$$\begin{cases}y_1'=5y_1+y_2\\ y_2'=y_1+5y_2\end{cases}\quad \text{且}\quad y_1(0)=1 \quad\text{與}\quad y_2(0)=-3$$

7. 對工數的教學或學習有何感想? (5%) 對此門課有何建議? (5%)

參考公式

拉普拉斯轉換： $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$

第一平移定理: $\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$

第二平移定理: $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]=e^{-as}F(s)$

尺度變換: $\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$

微分函數的拉普拉斯轉換: $\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

$\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

積分函數的拉普拉斯轉換: $\mathcal{L}[\int_0^t f(x)\,dx]=\frac{F(s)}{s}$

$\mathcal{L}[\int_0^t\int_0^\tau f(x)\,dx\,d\tau\,]=\frac{F(s)}{s^2}$

拉普拉斯轉換的微分: $\mathcal{L}[tf(t)]=(-1)\frac{d}{ds}F(s)$

$\mathcal{L}[t^2f(t)]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)$

拉普拉斯轉換的積分: $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^\infty F(\tau)\,d\tau$

$\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t^2}]=\int_s^\infty\int_\gamma^\infty F(\tau)\,d\tau\,d\gamma$

摺積: $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$

$\mathcal{L}[f(t)*g(t)]=F(s)\cdot G(s)$

雙曲函數: $\cosh at=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$

$\sinh at=\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$

初值定理: $\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$

終值定理: $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$

一階線性 **ODE:** $y'(x)+p(x)y(x)=q(x)$ 其積分因子為 $\mu=e^{\int p(x)dx}$