國立臺灣海洋大學河海工程學系 2019 工程數學(一) 第二次大考參考解答

系級：__________ 學號：__________ 姓名：__________

1. 已知一齊次常微分方程式其三個補解為 x^2, $x^{-3}\cos(2\ln x)$, $x^{-3}\sin(2\ln x)$，試問此常微分方程式為何? (10%)

2. 已知一常微分方程式 $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x-1}$ 之通解。
   (1) 試求其兩補解 y_1 與 y_2。 (6%)
   (2) 試求其特解 y_p。 (6%)

3. 試解:
   (1) $xy''-y'-(3+x)x^2e^x=0$ 並且滿足 $y(0)=0$ 與 $y(1)=2e$ (7%)
   (2) $(2x+1)^2y''-(12x+6)y'+16y=2$ (7%)
   (3) $xy''-xy'-y=0$ 並且滿足 $y(0)=0$ 與 $y'(0)=3$ (7%)

4. 已知微分方程式 $(1-2x)y''+4xy'-4y=0$
   (1) 試以觀察法求一補解 y_1。 (3%)
   (2) 試求另一補解 y_2。 (7%)

5. 已知一微分方程式 $y''-\dfrac{3}{x}y'+\dfrac{3}{x^2}y=x$ $(x>0)$
   (1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x)=?$ (6%)
   (2) 以變數變換，令 $t=\ln x$，則 $y(x)=Y(t)$，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (6%)
   (3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t)=?$ (6%)
   (4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t)=?$ (6%)
   (5) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$。 (3%)

6. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$，若給定質量塊 $m=1$，阻尼係數 $c=0$ 與彈簧常數 $k=4$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0)=0$ 與 $\dot{y}(0)=0$，給一外力為 $f(t)=\cos\omega t$，試問:
   (1) 此系統的自然振動頻率 $\omega_n=?$ (2%)
   (2) 當 $\omega=1$，其解為何?(4%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼? (2%)
   (3) 當 $\omega=2$，其解為何?(4%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼? (2%)
   (4) 當 $\omega=1.99$，其解為何?(4%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼? (2%)

參考解答:

1. 已知一齊次常微分方程式其三個補解為 x^2，$x^{-3}\cos(2\ln x)$，$x^{-3}\sin(2\ln x)$，試問此常微分方程式為何? (10%)

由補解形式可知此為三階 Euler-Cauchy ODE

可得 $m=2$，$m=-3\pm 2i$

特徵方程式為 $(m-2)(m+3-2i)(m+3+2i)=0$

$$\Rightarrow m^3+4m^2+m-26=0 \ldots(1)$$

由齊次常微分方程式 $x^3y'''+ax^2y''+bxy'+cy=0$

令 $y=x^m$ 帶入 ODE 可得

$m(m-1)(m-2)+am(m-1)+bm+c=0$

$\Rightarrow m^3+(a-3)m^2+(2-a+b)m+c=0 \ldots(2)$

由(1)與(2)比較係數可知 $a=7$，$b=6$，$c=-26$

$\therefore$ 此齊次常微分方程式為 $x^3y'''+7x^2y''+6xy'-26y=0$

2. 已知一常微分方程式 $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x-1}$ 之通解。

(1) 試求其兩補解 y_1 與 y_2。 (6%)

(2) 試求其特解 y_p。 (6%)

(1) 補解 y_1 與 y_2 滿足 $y''-4y'+4y=0$

令 $y=e^{\lambda x}$ 帶入 ODE 可得 $\lambda^2-4\lambda+4=0 \quad \Rightarrow (\lambda-2)^2=0$

$$\Rightarrow \lambda=2 \text{ (重根)}$$

$\therefore$ 可得兩補解 $y_1=e^{2x}$ 與 $y_2=xe^{2x}$

(2) 令特解 $y_p=y_1u_1+y_2u_2$ 代入 ODE 可得

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & xe^{2x}\\ \dfrac{e^{2x}}{x-1} & e^{2x}(2x+1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{2x} & xe^{2x}\\ 2e^{2x} & e^{2x}(2x+1)\end{vmatrix}}=\frac{-\dfrac{x}{x-1}e^{4x}}{e^{4x}}=-\frac{x}{x-1} \qquad \Rightarrow u_1=-x-\ln|x-1|$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix}e^{2x} & 0\\ 2e^{2x} & \dfrac{e^{2x}}{x-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{2x} & xe^{2x}\\ 2e^{2x} & e^{2x}(2x+1)\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{1}{x-1}e^{4x}}{e^{4x}}=\frac{1}{x-1} \qquad \Rightarrow u_2=\ln|x-1|$$

$$y_p=y_1u_1+y_2u_2=e^{2x}(x\ln|x-1|-\ln|x-1|-x)$$

3. 試解:

(1) $xy'' - y' - (3+x)x^2e^x = 0$ **並且滿足** $y(0)=0$ **與** $y(1)=2e$ **(7%)**

(2) $(2x+1)^2 y'' - (12x+6)y' + 16y = 2$ **(7%)**

(3) $xy'' - xy' - y = 0$ **並且滿足** $y(0)=0$ **與** $y'(0)=3$ **(7%)**

(1) 由 ODE 可看出缺少 y 項，故令 $u = y'$ $\Rightarrow u' = y''$

代回 ODE 可得 $u' - \frac{1}{x}u = (3x + x^2)e^x$ ⟶ 此為一階線性 ODE

可知其積分因子為 $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

同乘積分因子後可得 $\frac{1}{x}u' - \frac{1}{x^2}u = (3+x)e^x$ $\Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}u) = (3+x)e^x$

$\Rightarrow \frac{1}{x}u = (2+x)e^x + c_1$

$\Rightarrow u = (2x + x^2)e^x + c_1 x$

又 $u = y' = (2x + x^2)e^x + c_1 x$ $\Rightarrow y = x^2e^x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2$

由 $y(0)=0$ $\Rightarrow c_2 = 0$

$y(1) = 2e$ $\Rightarrow c_1 = 2e$

$\therefore$ $y(x) = ex^2 + x^2e^x$

(2) 令 $u = 2x+1$ $\Rightarrow du = 2dx$

$y' = \frac{dy(x)}{dx} = 2\frac{dY(u)}{du} = 2Y'$

$y'' = \frac{dy'(x)}{dx} = 2\frac{d(2Y')}{du} = 4Y''$

$\therefore$ $(2x+1)^2 y'' - (12x+6)y' + 16y = 2$ $\Rightarrow 4u^2Y'' - 12uY' + 16Y = 2$

$\Rightarrow u^2Y'' - 3uY' + 4Y = \frac{1}{2}$

此為 Euler-Cauchy ODE

令 $Y = u^m$ 帶入 ODE 可得

$m(m-1) - 3m + 4 = 0$ $\Rightarrow m^2 - 4m + 4 = 0$ $\Rightarrow m = 2$ (重根)

$\therefore$ 可知補解 $Y_h = c_1 u^2 + c_2 u^2 \ln u$

令特解 $Y_p = u^2 v_1 + (u^2 \ln u)\cdot v_2$

$$W = \begin{vmatrix} u^2 & u^2 \ln u \\ 2u & u(2\ln u + 1) \end{vmatrix} = u^3$$

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u^2 \ln u \\ \frac{1}{2u^2} & u(2\ln u + 1) \end{vmatrix}}{W} = -\frac{1}{2u^3}\ln u \quad \Rightarrow v_1 = \frac{1}{8u^2} + \frac{1}{4u^2}\ln|u|$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} u^2 & 0 \\ 2u & \frac{1}{2u^2} \end{vmatrix}}{W} = \frac{1}{2u^3} \quad \Rightarrow v_2 = -\frac{1}{4u^2}$$

$$Y_p = u^2\left(\frac{1}{8u^2} + \frac{1}{4u^2}\ln|u|\right) + u^2 \ln|u| \cdot \left(-\frac{1}{4u^2}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \quad Y = Y_h + Y_p = c_1 u^2 + c_2 u^2 \ln|u| + \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow y = c_1(2x+1)^2 + c_2(2x+1)^2 \ln|2x+1| + \frac{1}{8}$$

(3) $xy'' - xy' - y = 0$ 並且滿足 $y(0) = 0$ 與 $y'(0) = 3$ (7%)

令 $a_1 = x, a_2 = -x, a_3 = -1$

由 $a_1'' - a_2' + a_3 = 0$ 可知此為正合型 ODE

故有 $xy'' - xy' - y = \frac{d}{dx}[b_1 y' + b_0 y] = b_1 y'' + b_1' y' + b_0 y' + b_0 y$

比較後可得 $b_1 = x$，$b_1' + b_0 = -x \Rightarrow b_0 = -x - 1$

$\therefore \quad xy'' - xy' - y = \frac{d}{dx}[xy' - (x+1)y] = 0$

$\Rightarrow xy' - (x+1)y = c_1$

由初始條件 $y(0) = 0$ 與 $y'(0) = 3$ 可得 $c_1 = 0$

$\therefore \quad xy' - (x+1)y = 0 \quad \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x+1}{x} dx$

$\Rightarrow \ln y = x + \ln x + c$

$\Rightarrow \ln \frac{y}{xe^x} = c$

$\Rightarrow y = c_2 x e^x$

由 $y'(0) = 3$ 可得 $c_2 = 3$

$\therefore \quad y(x) = 3xe^x$

4. 已知微分方程式 $(1-2x)y''+4xy'-4y=0$

(1) 試以觀察法求一補解 y_1**。 (3%)**

(2) 試求另一補解 y_2**。 (7%)**

(1) 嘗試將 $y=x^m$ 代入後觀察可知當 $m=1$ 為其一解

故可知其一補解為 $y_1=x$

(2) Wronskian 行列式為 $W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2=xy_2'-y_2$

並且滿足 $W'+\dfrac{4x}{1-2x}W=0 \quad \Rightarrow W=e^{-\int\frac{4x}{1-2x}dx}=c_1e^{2x+\ln|2x-1|}=c_1(2x-1)e^{2x}$

$\therefore\ xy_2'-y_2=c_1(2x-1)e^{2x} \ \Rightarrow y_2'-\dfrac{1}{x}y_2=c_1\dfrac{2x-1}{x}e^{2x}$ ⟶ 此為一階線性 ODE

可知其積分因子為 $\mu=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=\dfrac{1}{x}$

同乘積分因子後可得 $\dfrac{1}{x}y_2'-\dfrac{1}{x^2}y_2=c_1\dfrac{2x-1}{x^2}e^{2x} \quad \Rightarrow \dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{x}y_2)=c_1\dfrac{2x-1}{x^2}e^{2x}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}y_2=c_1\frac{e^{2x}}{x}+c_2$$

$$\Rightarrow y_2=c_1e^{2x}+c_2x$$

$\therefore$ 令一補解 y_2 為 e^{2x}

5. 已知一微分方程式 $y''-\dfrac{3}{x}y'+\dfrac{3}{x^2}y=x \quad (x>0)$

(1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x)=?$ **(6%)**

(2) 以變數變換，令 $t=\ln x$**，則** $y(x)=Y(t)$ **，試求轉換後以** $Y(t)$ **表示的微分方程式。 (6%)**

(3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t)=?$ **(6%)**

(4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t)=?$ **(6%)**

(5) 試將 $Y(t)$ **轉換回** $y(x)$**。 (3%)**

(1) $y''-\dfrac{3}{x}y'+\dfrac{3}{x^2}y=x \quad \Rightarrow x^2y''-3xy'+3y=x^3$ ⟶ 此為 Euler ODE

令 $y=x^m \quad \Rightarrow m(m-1)x^m-3mx^m+3x^m=0$

$$\Rightarrow m^2-4m+3=0$$

$$\Rightarrow (m-1)(m-3)=0$$

$$\Rightarrow m=1 \text{ or } 3$$

$\therefore\ y_h=c_1x+c_2x^3$

(2) 令 $t=\ln x \quad \Rightarrow x=e^t$

$\therefore\ y(x)=y(e^t)=Y(t)$

$$y'(x)=\frac{dy(x)}{dx}=\frac{dY(t)}{dx}=\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dY(t)}{dt}=\frac{1}{x}Y'(t)$$

$$y''(x)=\frac{dy'(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}Y'(t))=-\frac{1}{x^2}Y'(t)+\frac{1}{x}\frac{dY'(t)}{dx}=\frac{1}{x^2}[Y''(t)-Y'(t)]$$

將 $y'(x)$ 與 $y''(x)$ 代回 ODE 可得

$$x^2\cdot\frac{1}{x^2}[Y''(t)-Y'(t)]-3x\cdot\frac{1}{x}Y'(t)+3Y(t)=e^{3t}$$

$$\Rightarrow Y''(t)-4Y'(t)+3Y(t)=e^{3t}$$

(3) $\because$ 此為常係數 ODE

$\therefore$ 令 $Y(t)=e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

$$(\lambda^2-4\lambda+3)e^{\lambda x}=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-4\lambda+3=0$$

$$\Rightarrow \lambda=1 \text{ or } 3$$

$$\therefore\ Y_h=c_1e^t+c_2e^{3t}$$

(4) 由待定係數法，

令 $Y_p=Ate^{3t} \qquad \Rightarrow Y_p'=A(3t+1)e^{3t}$

$\Rightarrow Y_p''=A(9t+6)e^{3t}$ 代回 ODE 可得 $A=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ Y_P=\frac{1}{2}te^{3t}$$

(5) $Y(t)=Y_h(t)+Y_p(t)=c_1e^t+c_2e^{3t}+\frac{1}{2}te^{3t}$

$$\Rightarrow y(x)=c_1x+c_2x^3+\frac{1}{2}x^3\ln x$$

6. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$，若給定質量塊 $m=1$，阻尼係數 $c=0$ 與彈簧常數 $k=4$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0)=0$ 與 $\dot{y}(0)=0$，給一外力為 $f(t)=\cos\omega t$，試問:

(1) 此系統的自然振動頻率 $\omega_n=?$ **(2%)**

(2) 當 $\omega=1$，其解為何?**(4%)** 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼? **(2%)**

(3) 當 $\omega=2$，其解為何?**(4%)** 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼? **(2%)**

(4) 當 $\omega=1.99$，其解為何?**(4%)** 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼? **(2%)**

(1) $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$ 又 $m=1$, $c=0$, $k=4$ 與 $f(t)=\cos\omega t$

$\therefore\ \ddot{y}(t)+4y(t)=\cos\omega t$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=2$$

(2) 當 $\omega=1\neq\omega_n$ 時，外力對系統產生激發行為

$\ddot{y}(t)+4y(t)=\cos t$

令 $y(t)=e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

$(\lambda^2+4)e^{\lambda x}=0$

$\Rightarrow \lambda^2+4=0$

$\Rightarrow \lambda=2i,-2i$

$\therefore\ y_h=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$

令 $y_p=A\cos t+B\sin t$ 代入 ODE 可得

$-A\cos t-B\sin t+4A\cos t+4B\sin t=\cos t$

$\Rightarrow 3A\cos t+3B\sin t=\cos t$

$\therefore\ A=\frac{1}{3},\ B=0$

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+\frac{1}{3}\cos t$$

又 $y(0)=0 \quad \Rightarrow c_1=-\frac{1}{3}$

$\dot{y}(0)=0 \quad \Rightarrow c_2=0$

$$\therefore\ y(t)=-\frac{1}{3}\cos 2t+\frac{1}{3}\cos t$$

(3) 當 $\omega=\omega_n=2$ 時，外力對系統產生共振行為

$\ddot{y}(t)+4y(t)=\cos 2t$

令 $y_p=t(A\cos 2t+B\sin 2t)=t\cdot y_h$

$\dot{y}_p=y_h+t\,\dot{y}_h$

$\ddot{y}_p = \dot{y}_h + \dot{y}_h + t\,\ddot{y}_h = 2\dot{y}_h + t\,\ddot{y}_h$ 代回 ODE 可得

$$(2\dot{y}_h + t\cdot\ddot{y}_h) + t\cdot y_h = \cos 2t$$

$$\Rightarrow 2\dot{y}_h = \cos 2t$$

$$\Rightarrow 2(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t) = \cos 2t$$

$$\therefore \quad A = 0,\ \ B = \frac{1}{4}$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t + \frac{1}{4}t\cdot\sin 2t$$

又 $y(0) = 0 \quad \Rightarrow c_1 = 0$

$\dot{y}(0) = 0 \quad \Rightarrow c_2 = 0$

$$\therefore \quad y(t) = \frac{1}{4}t\cdot\sin 2t$$

(4) 當 $\omega = 1.99 \approx \omega_n$ 時，外力對系統產生拍擊行為

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = \cos(1.99t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2)}(\cos\omega t - \cos\omega_n t)$$

$$= \frac{2}{m(\omega_n^2 - \omega^2)}\sin\frac{\omega_n + \omega}{2}t\cdot\sin\frac{\omega_n - \omega}{2}t$$

$$= \frac{1}{2^2 - 1.99^2}(\cos 1.99t - \cos 2t)$$

$$= \frac{2}{2^2 - 1.99^2}\sin\frac{3.99}{2}t\cdot\sin\frac{0.01}{2}t$$