

系級：\_\_\_\_\_ 學號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

1. 已知一齊次常微分方程式其三個補解為  $x^2$ ,  $x^{-3} \cos(2 \ln x)$ ,  $x^{-3} \sin(2 \ln x)$ , 試問此常微分方程式為何? (10%)
  
2. 已知一常微分方程式  $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x-1}$  之通解。
  - (1) 試求其兩補解  $y_1$  與  $y_2$ 。 (6%)
  - (2) 試求其特解  $y_p$ 。 (6%)
  
3. 試解:
  - (1)  $xy'' - y' - (3+x)x^2e^x = 0$  並且滿足  $y(0) = 0$  與  $y(1) = 2e$  (7%)
  - (2)  $(2x+1)^2 y'' - (12x+6)y' + 16y = 2$  (7%)
  - (3)  $xy'' - xy' - y = 0$  並且滿足  $y(0) = 0$  與  $y'(0) = 3$  (7%)
  
4. 已知微分方程式  $(1-2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$ 
  - (1) 試以觀察法求一補解  $y_1$ 。 (3%)
  - (2) 試求另一補解  $y_2$ 。 (7%)
  
5. 已知一微分方程式  $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = x$  ( $x > 0$ )
  - (1) 試求此微分方程的補解  $y_h(x) = ?$  (6%)
  - (2) 以變數變換, 令  $t = \ln x$ , 則  $y(x) = Y(t)$ , 試求轉換後以  $Y(t)$  表示的微分方程式。 (6%)
  - (3) 試求轉換後微分方程的補解  $Y_h(t) = ?$  (6%)
  - (4) 試求轉換後微分方程的特解  $Y_p(t) = ?$  (6%)
  - (5) 試將  $Y(t)$  轉換回  $y(x)$ 。 (3%)
  
6. 已知單自由度振動系統其數學表示為  $m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = f(t)$ , 若給定質量塊  $m=1$ , 阻尼係數  $c=0$  與彈簧常數  $k=4$  並且質量塊為靜止狀態即其初始條件  $y(0)=0$  與  $\dot{y}(0)=0$ , 給一外力為  $f(t) = \cos \omega t$ , 試問:
  - (1) 此系統的自然振動頻率  $\omega_n = ?$  (2%)
  - (2) 當  $\omega=1$ , 其解為何?(4%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼? (2%)
  - (3) 當  $\omega=2$ , 其解為何?(4%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼? (2%)
  - (4) 當  $\omega=1.99$ , 其解為何?(4%) 外力對此系統造成的運動行為稱為什麼? (2%)