國立臺灣海洋大學河海工程學系 2019 工程數學(一) 第一次大考參考解答

系級：＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 已知 $y' = \dfrac{2xy^3 + 4x^3 - 3y^4}{Axy^3 + Bx^2y^2}$ 為一正合微分方程，且 A, B 均為常數

   (1) 試求常數 A, B 之值。(4%)

   (2) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (7%)

2. 試以分離變數法求解下述微分方程式

   (1) $x\sin 2x + \sin(x+y)\,y' = \sin(x-y)\,y'$ (8%)

   (2) $\sqrt{1+x}\,dy = \sqrt{(1+y)(1-y)}\,dx$ (8%)

   (3) $y' = \dfrac{x+2y+7}{-2x+y-9}$ (8%)

3. 已知微分方程式為 $x\cos y\dfrac{dy}{dx} + 2\sin y = -4x^2$

   (1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(7%)
   (若為線性，直接求解；若非線性，使用變數變換法轉成線性，再求解)

   (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(7%)
   (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

特殊微分方程式 － Clairaut、Bernoulli 與 Riccati 微分方程

4. 已知微分方程式為 $y' - 4xy + 2x\sqrt{y} = 0$

   (1) 此為何種類型之微分方程式? (2%) 為線性或非線性? (2%)

   (2) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (7%)

5. 已知微分方程式為 $xy' + 3xy = y^2 + 2x^2 + y$

   (1) 此為何種類型之微分方程式? (2%) 為線性或非線性? (2%)

   (2) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (7%)

6. 已知微分方程式為 $(y')^2 + xy' - y = 0$

   (1) 此為何種類型之微分方程式? (2%) 為線性或非線性? (2%)

   (2) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ (7%)

7. 試解下列各微分方程

   (1) $(2y^2 - 6xy)dx + (3xy - 4x^2)dy = 0$ (7%)

   (2) $y' = \dfrac{y}{2x + y^3e^y}$ (7%)

<參考解答>

1. 已知 $y' = \dfrac{2xy^3 + 4x^3 - 3y^4}{Axy^3 + Bx^2y^2}$ **為一正合微分方程，且 *A, B* 均為常數**

(1) 試求常數 *A, B* 之值。(4%)

(2) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ **(7%)**

(1) $y' = \dfrac{2xy^3 + 4x^3 - 3y^4}{Axy^3 + Bx^2y^2} \quad \Rightarrow (2xy^3 + 4x^3 - 3y^4)dx - (Axy^3 + Bx^2y^2)dy = 0$

令 $M = 2xy^3 + 4x^3 - 3y^4 \quad \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 - 12y^3$

$N = -(Axy^3 + Bx^2y^2) \quad \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = -Ay^3 - 2Bxy^2$

又此為正合 ODE，故可知 $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore$ 可得 $A = 12,\ B = -3$

(2) $M = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy^3 + 4x^3 - 3y^4 \quad \Rightarrow \phi = x^2y^3 + x^4 - 3xy^4 + f(y)$

$N = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -12xy^3 + 3x^2y^2 \quad \Rightarrow \phi = -3xy^4 + x^2y^3 + g(x)$

比較後可得 $\phi(x, y) = x^2y^3 - 3xy^4 + x^4 = C$

2. 試以分離變數法求解下述微分方程式

(1) $x\sin 2x + \sin(x+y)y' = \sin(x-y)y'$ (8%)

(2) $\sqrt{1+x}\,dy = \sqrt{(1+y)(1-y)}\,dx$ (8%)

(3) $y' = \dfrac{x + 2y + 7}{-2x + y - 9}$ (8%)

(1) $x\sin 2x + \sin(x+y)y' = \sin(x-y)y'$

$\Rightarrow x\sin 2x = [\sin(x-y) - \sin(x+y)]\dfrac{dy}{dx}$

$\Rightarrow 2x\sin x\cos x = -2\cos x\sin y\dfrac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \int x\sin x\,dx = -\int \sin y\,dy$

$\Rightarrow \sin x - x\cos x = \cos y + C$

$\Rightarrow \sin x - x\cos x - \cos y = C$

(2) $\sqrt{1+x}\,dy=\sqrt{(1+y)(1-y)}\,dx \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$

$$\Rightarrow \sin^{-1} y = 2\sqrt{1+x}+C$$

(3) $y'=\frac{x+2y+7}{-2x+y-9} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+7}{-2x+y-9}$

令 $x=u+a \quad \Rightarrow dx=du$

$y=v+b \quad \Rightarrow dy=dv$

代回 ODE 可得 $\frac{dv}{du}=-\frac{u+2v+(a+2b+7)}{-2u+v+(-2a+b-9)}$

可得 $\begin{cases} a+2b+7=0 \\ -2a+b-9=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=-1 \end{cases}$

$\therefore \quad \frac{dv}{du}=\frac{u+2v}{-2u+v} \quad \Rightarrow \frac{dv}{du}=\frac{1+2\frac{v}{u}}{-2+\frac{v}{u}}$

令 $t=\frac{v}{u} \quad \Rightarrow v=ut \quad \Rightarrow \frac{dv}{du}v'=t+u\frac{dt}{du}$ 代回 ODE 可得

$t+u\frac{dt}{du}=\frac{1+2t}{-2+t} \quad \Rightarrow u\frac{dt}{du}=\frac{1+2t}{-2+t}-t=\frac{1+4t-t^2}{-2+t}$

$$\Rightarrow -\frac{t-2}{t^2-4t-1}dt=\frac{1}{u}du$$

$$\Rightarrow -\int\frac{t-2}{t^2-4t-1}dt=\int\frac{1}{u}du$$

令 $s=t^2-4t-1 \quad \Rightarrow ds=(2t-4)dt$

$\therefore \quad -\int\frac{t-2}{t^2-4t-1}dt=\int\frac{1}{u}du \quad \Rightarrow -\int\frac{1}{s}ds=2\int\frac{1}{u}du$

$$\Rightarrow -\ln|s|=2\ln|u|+c$$

$$\Rightarrow su^2=\frac{1}{e^c}$$

$$\Rightarrow (t^2-4t-1)u^2=c_1$$

$$\Rightarrow (\frac{v^2}{u^2}-4\frac{v}{u}-1)u^2=c_1$$

$$\Rightarrow v^2-4uv-u^2=c_1$$

$$\Rightarrow (y+1)^2-4(x+5)(y+1)-(x+5)^2=c_1$$

3. 已知微分方程式為 $x\cos y\dfrac{dy}{dx}+2\sin y=-4x^2$

(1) 此微分方程式為線性或非線性? (2%) 並以一階線性法求解。(7%)
(若為線性，直接求解；若非線性，使用變數變換法轉成線性，再求解)

(2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (2%) 並以正合法求解。(7%)
(若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

(1) 此為非線性 ODE

令 $u=\sin y \;\Rightarrow du=\cos y\,dy$ 代回 ODE 可得

$\dfrac{du}{dx}+\dfrac{2}{x}u=-4x \quad \rightarrow$ 此為一階線性 ODE

積分因子 $\mu=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{2}{x}dx}=x^2$

同乘積分因子後可得 $x^2\dfrac{du}{dx}+2xu=-4x^3$

$$d(x^2u)=-4x^3$$

$$\Rightarrow \int d(x^2u)=-4\int x^3dx$$

$$\Rightarrow x^2u=x^4+c$$

$$\Rightarrow x^2\sin y=-x^4+c$$

(2) $x\cos y\dfrac{dy}{dx}+2\sin y=-4x^2$

$\Rightarrow (2\sin y+4x^2)dx+(x\cos y)dy=0$

令 $M=2\sin y+4x^2 \quad \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y}=2\cos y$

$N=x\cos y \quad \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x}=\cos y$

$\because \dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore$ 此為非正合 ODE

由 $\dfrac{1}{N}(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x})=\dfrac{1}{x}$ 可知積分因子 $\mu=\mu(x)$

$\therefore$ 積分因子 $\displaystyle\int\frac{1}{\mu}d\mu=\int\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})dx$

$$\Rightarrow \mu=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$$

同乘積分因子後可得 $\Rightarrow (2x\sin y+4x^3)dx+(x^2\cos y)dy=0$

此為正合 ODE

$\therefore M=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}=2x\sin y+4x^3 \quad \Rightarrow \phi=x^2\sin y+x^4+f(y)$

$$N = \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \cos y \quad \Rightarrow \phi = x^2 \sin y + g(x)$$

比較後可得 $\phi(x, y) = x^2 \sin y + x^4 = c$

4. 已知微分方程式為 $y' - 4xy + 2x\sqrt{y} = 0$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (2%) 為線性或非線性? (2%)

(2) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ **(7%)**

(1) $y' - 4xy + 2x\sqrt{y} = 0 \quad \Rightarrow y' - 4xy = -2xy^{\frac{1}{2}}$

此為 Bernoulli ODE，屬於非線性 ODE

(2) $y' - 4xy = -2xy^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow y^{-\frac{1}{2}}y' - 4xy^{\frac{1}{2}} = -2x$

令 $u = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'$ 代回 ODE 可得

$2u' - 4xu = -2x$

$\Rightarrow u' - 2xu = -x \quad \rightarrow$ 此為一階線性 ODE

積分因子為 $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int 2x\,dx} = e^{-x^2}$

同乘積分因子後可得 $e^{-x^2}u' - e^{-x^2}u = -xe^{-x^2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-x^2}u) = -xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \int d(e^{-x^2}u) = -\int xe^{-x^2}dx$$

$$\Rightarrow e^{-x^2}u = \frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2} + Ce^{x^2}$$

5. 已知微分方程式為 $xy' + 3xy = y^2 + 2x^2 + y$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (2%) 為線性或非線性? (2%)

(2) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ **(7%)**

(1) $xy' + 3xy = y^2 + 2x^2 + y \quad \Rightarrow y' = \frac{1}{x}y^2 + (\frac{1}{x} - 3)y + 2x$

此為 Riccati ODE，屬於非線性 ODE

(2) 由觀察得一解 $S = x$

令其解為 $y = S + \frac{1}{V} = x + \frac{1}{V} \quad \Rightarrow y' = 1 - \frac{V'}{V^2}$ 代回 ODE 可得

$$1 - \frac{V'}{V^2} = \frac{1}{x}(x + \frac{1}{V})^2 + (\frac{1}{x} - 3)(x + \frac{1}{V}) + 2x$$

$\Rightarrow V' + (\frac{1}{x} - 1)V = -\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad$ 此為一階線性 ODE

積分因子為 $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int (\frac{1}{x} - 1)\, dx} = e^{\ln x - x} = xe^{-x}$

同乘積分因子後可得 $xe^{-x}V' + xe^{-x}(\frac{1}{x} - 1)V = -e^{-x}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xe^{-x}V) = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int d(xe^{-x}V) = -\int e^{-x}dx$$

$$\Rightarrow xe^{-x}V = e^{-x} + C$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{x}(1 + Ce^{x})$$

可得 Ricatti ODE 的解為 $y = S + \frac{1}{V} = x + \frac{x}{1 + Ce^{x}}$

6. 已知微分方程式為 $(y')^2 + xy' - y = 0$

(1) 此為何種類型之微分方程式? (2%) 為線性或非線性? (2%)

(2) 試求此微分方程式之解 $y(x) = ?$ **(7%)**

(1) $(y')^2 + xy' - y = 0 \quad \Rightarrow y = xy' + (y')^2$

此為 Clairaut ODE，屬於非線性 ODE

(2) 令 $p = y' \quad \Rightarrow y = xp + p^2$

將兩邊對 x 微分可得 $y' = p + xp' + 2pp'$

$$\Rightarrow p = p + xp' + 2pp'$$

$$\Rightarrow (x + 2p)p' = 0$$

由 $p' = 0 \quad \Rightarrow y' = p = c$ 代回 $y = xy' + y'^2$

可得 $y = xc + c^2$ (通解)

由 $x + 2p = 0 \quad \Rightarrow y' = p = -\frac{x}{2}$ 代回 $y = xy' + y'^2$

可得 $y = -\frac{x^2}{4}$ (奇解)

7. 試解下列各微分方程

(1) $(2y^2-6xy)dx+(3xy-4x^2)dy=0$ **(7%)**

(2) $y'=\dfrac{y}{2x+y^3e^y}$ **(7%)**

(1) $(2y^2-6xy)dx+(3xy-4x^2)dy=0$

$$\Rightarrow (2y^2dx+3xy\,dy)-(6xy\,dx+4x^2dy)=0$$

$$\Rightarrow y(2ydx+3x\,dy)-2x(3y\,dx+2x\,dy)=0$$

$$\Rightarrow y\frac{d(x^2y^3)}{xy^2}-2x\frac{d(x^3y^2)}{x^2y}=0$$

$$\Rightarrow \int d(x^2y^3)-2\int d(x^3y^2)=0$$

$$\Rightarrow x^2y^3-2x^3y^2=C$$

(2) $y'=\dfrac{y}{2x+y^3e^y}$ $\quad\Rightarrow \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{2x+y^3e^y}{y}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=y^2e^y$$ $\rightarrow$ 視 $x=x(y)$ 此為一階線性 ODE

∴積分因子為 $\mu=e^{\int p(y)dy}=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln y}=\dfrac{1}{y^2}$

同乘積分因子後可得 $\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{2}{y^3}x=e^y$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}(\frac{1}{y^2}x)=e^y$$

$$\Rightarrow \int d(\frac{1}{y^2}x)=\int e^ydy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}x=e^y+C$$