

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

- (1) 試求 A 的行列式值。(6%)
 (2) 試以 Gauss-Jordan 消去法求 A^{-1} 。(10%)

2. 給一矩陣 $A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & a \\ -4 & 2 & b \\ 7 & 11 & c \end{bmatrix}$ ，其中 a, b, c 均為常數，並且知道矩陣 A 有兩特

徵向量為 $x^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ 與 $x^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$ ，試問：

- (1) a, b, c 之值為何?(6%)
 (2) 矩陣 A 之特徵值為何?(6%)
 (3) 第三個特徵向量 $x^3 = ?$ (4%)

3. 已知 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ， $B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ，試求：

(1) $\det(5A^T) = ?$ (2) $\det(B^T) = ?$ (3) $\det(AB) = ?$ (4) $(AB)^{-1} = ?$ (16%)

4. 試以 Gram-Schmidt 法將向量集 $\{x^1, x^2, x^3\}$ ， $x^1 = [1 \ 1 \ 1]^T$ ， $x^2 = [2 \ 0 \ 1]^T$ ， $x^3 = [1 \ 2 \ 2]^T$ 正交單位化。(10%)

5. (1) 給方程式 $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 16$ ，試問此二次式代表何種圓錐曲線?(10%)
 (請將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T = [x_1 \ x_2]$ 轉換至新座標向量 $\mathbf{y}^T = [y_1 \ y_2]$)

(2) 請問在曲線某一點，其距離原點最遠的距離為何?(2%)

6. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ ，試問：

- (1) A 的特徵方程為何? (4%)
 (2) $A^{10} - 2A^9 - 3A^2 - 3I = ?$ (8%)
 (3) 若 $A^{-1} = pA^2 + qA + rI$ ，則 $p = ?$ ， $q = ?$ ， $r = ?$ (8%)

7. 試解： $\frac{dx}{dt} = Ax + z$ 其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ， $z = \begin{Bmatrix} e^{-t} \\ 4e^{-t} \end{Bmatrix}$ 。(10%)