

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 三角形之三頂點為 $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 3)$, $C(-2, 3, 2)$, 試問其三內角為何? (9%)

2. (1) 向量場 $\vec{F} = 2xy\vec{i} + (x^2 + 2yz)\vec{j} + (y^2 + 1)\vec{k}$, 試說明 $\vec{F}$ 是否為保守場? (6%)

(2) 若給一純量函數 $\phi(x, y, z)$ 並且滿足 $\vec{F} = -\nabla\phi$, 試求 $\phi(x, y, z)$ 為何? (6%)

(3) 試計算 $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, 其中 $C: \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 2t \vec{k}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (8%)

3. 給一心臟線 $\vec{r}(t) = (\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t)$, 其中 $\rho(t) = a(1 - \cos t)$ 且 $0 \leq t \leq 2\pi$

(1) 試計算心臟線之周長。 (7%)

(2) 試以格林定理: $\oint f dx + g dy = \iint (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}) dx dy$, 給定 $f = -y$ 與 $g = x$ 來求
心臟線之面積。 (7%)

(3) 試求在點 $(0, a)$ 之曲率 κ 。 (7%)

4. 曲線 C 為空間上兩個面 S_1 和 S_2 的交線, S_1 的方程為 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, S_2 的方程為 $y = z$, S_1 為球面, S_2 為平面。曲線 C 上兩點 A 和 B 的座標分別是 $(1, 0, 0)$

和 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 請計算沿著曲線 C 由 A 點積分到 B 點的路徑積分

$\int_{(1,0,0)}^{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})} u dx + v dy + w dz$, 其中 $u = y^2 z^2 - y \sin(xy)$, $v = 2xyz^2 - x \sin(xy)$,
 $w = 2xy^2 z$ (15%)

5. 已知場 $\vec{F} = z^2 e^{x^2} \vec{i} + xy^2 \vec{j} + \tan^{-1} y \vec{k}$ 及曲面 $S_1: x^2 + y^2 = 4 - z$ ($0 \leq z \leq 4$)

與 $S_2: z = 0$, Γ 為 S_1 、 S_2 之交線, 試問:

(1) 試畫出 S_1 之圖形, 並標出 S_1 、 S_2 與 Γ 。 (5%)

(2) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (5%)

(3) S_1 上的單位法向量 $\vec{n} = ?$ (5%)

(4) $\oiint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = ?$ (5%)

(5) $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = ?$ (5%)

(6) $\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA = ?$ (5%)

(7) $\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dA = ?$ (5%)

Hint:

Gauss 散度定理: $\iiint \nabla \cdot \vec{F} \, dV = \oint \vec{F} \cdot \vec{n} \, dA$ (3D)

$$\iint \nabla \cdot \vec{F} \, dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds \quad (2D)$$

格林定理: $\int P \, dx + Q \, dy = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$

Stokes 旋度定理: $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$\text{曲率: } \kappa = \frac{|y''(x)|}{[1 + (y'(x))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{[\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}'(t)]^{\frac{3}{2}}} \quad \text{扭率: } \tau = \left| \frac{d(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}{ds} \right|$$

$$\text{二倍角公式: } \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\text{四面體體積: } V = \frac{1}{3} A_0 h, \quad (A_0: \text{底面積}; h: \text{高})$$