國立臺灣海洋大學河海工程學系 2018 工程數學(一) 第二次隨堂測驗參考解答

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

已知微分方程式為 $y' + 3xy = xy^2 + 2x$

(1) 此微分方程式為線性或非線性?

(2) 先以觀察法得一特解 S 。

(3) 再由變數變換($y = W + S$)將上述 ODE 轉換為以 W 表示之微分方程。
請問:轉換後為何種類型微分方程式。

(4) 試求$W =$? 並寫出最後解的表示式($y = W + S$)。

參考解答:

(1) 此為 Riccati ODE，為非線性微分方程式

(2) 由觀察可得一解 $S = 1$

(3) 令 $y = W + S = W + 1$ 代入 ODE 可得

$$W' + 3x(W+1) = x(W+1)^2 + 2x$$

$$\Rightarrow W' + 3xW + 3x = xW^2 + 2xW + x + 2x$$

$$\Rightarrow W' + xW = xW^2 \qquad \therefore \text{ 可知此為 Bernoulli ODE}$$

(4) $W' + xW = xW^2 \quad \Rightarrow W^{-2}W' + xW^{-1} = x$

令 $u = W^{-1} \quad \Rightarrow u' = -W^{-2}W'$ 代回 ODE 可得

$u' - xu = -x \longrightarrow$ 此為一階線性 ODE

$\therefore$ 積分因子 $\mu = e^{-\int x dx} = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

將 ODE 同乘積分因子後可得 $e^{-\frac{1}{2}x^2}u' - xe^{-\frac{1}{2}x^2}u = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{-\frac{1}{2}x^2}u) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2}u = -\int xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}x^2}u = e^{-\frac{1}{2}x^2} + c$$

$$\Rightarrow u = 1 + ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{W} = ce^{\frac{1}{2}x^2} + 1$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{ce^{\frac{1}{2}x^2} + 1}$$

$$\therefore \quad y = W + S = \frac{1}{ce^{\frac{1}{2}x^2} + 1} + 1$$