國立臺灣海洋大學河海工程學系 2018 工程數學(一) 2A 班第 11 次作業參考解答

系級：_____　　學號：_____　　姓名：_____

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{Bmatrix}$，請解出 $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = ?$

2. 對如下矩陣 A 與向量 b 試解方程組 $Ax = b$。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \ \& \ b = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

3. 已知在 R^3 之映射 $T(x) = [2x_1 + x_2 \quad x_2 - x_3 \quad 2x_2 + 4x_3]^T$ 試求 T 之特徵值與特徵向量。

4. 試問以下矩陣 A、B 之特徵值與特徵向量。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. 對於如下矩陣 A，已知 $t(A) = 6$ 與 $\det(A) = -30$，試問 A 之特徵值。

$$A = \begin{bmatrix} a & -2.6 & b \\ c & d & 1.7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

參考解答:

1. $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

2. $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} + s \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + t \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

3. 特徵值 $\lambda = 3, 2, 2$

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow \quad x^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \Rightarrow \quad x^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ (只有一個)}$$

4. A 之特徵值 $\lambda = -1, -1, 1, 1$

A 之特徵向量:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^1, x^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^3, x^4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

B 之特徵值 $\lambda = -1, -5, 3, 3$

B 之特徵向量:

$$\lambda_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_2 = -5 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \begin{Bmatrix} -11 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

5. $\lambda = 3, -2, 5$