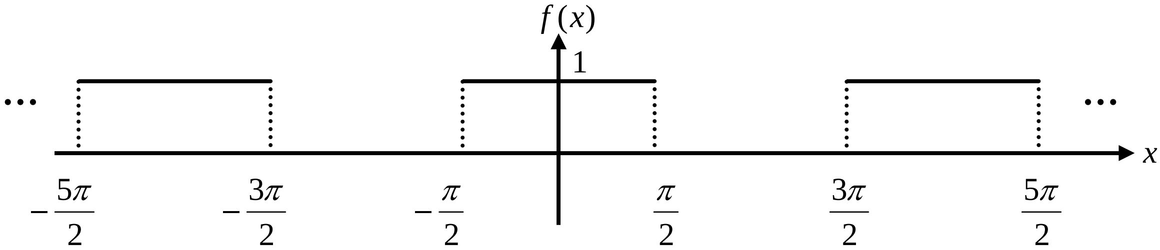
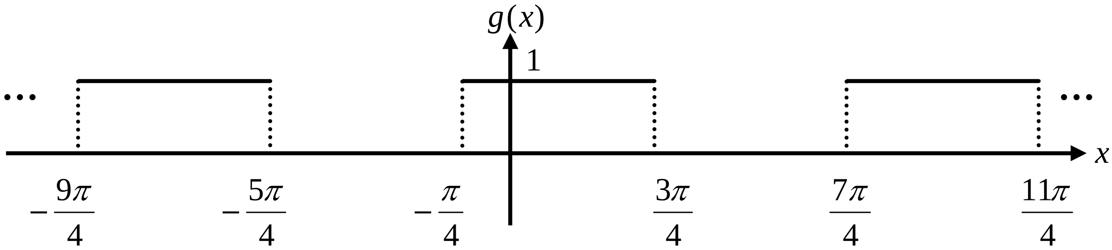
系級：＿＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 已知函數 $f(x)=3\sin x-4\sin x\cos^2 x$，試求 $f(x)$ 的傅立葉級數。 (6%)

2. 週期函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形如下:





(1) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數。 (8%)

(2) 若 $f(x)$ 的傅立葉級數為 $a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega_0 x)+b_n\sin(n\omega_0 x)$，

而 $g(x)$ 的傅立葉級數為 $A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega_0 x)+B_n\sin(n\omega_0 x)$，

試求 $A_0,\ A_n,\ B_n$ 與 $a_0,\ a_n,\ b_n$ 之間的關係。 (6%)

3. 給一週期函數 $f(x)=x+\pi,\ -\pi<x<\pi$ 且 $f(x)=f(x+2\pi)$

(1) 試求其傅立葉級數展開。 (8%)

(2) 試求 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=?$ (4%)

4. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}1-x, & -1\le x\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

(1) 試求函數 $f(x)$ 的傅立葉積分表示式。 (8%)

(2) 試問 $\int_0^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x}dx=?$ (4%)

5. (1) 試求 $h(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $H(\omega)$，其中 $a>0$。 (5%)

(2) 試求 $g(x)=xe^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $G(\omega)$。 (5%)

(3) 試求 $F(\omega)=\dfrac{e^{-3(i\omega+4)}}{16-\omega^2+8i\omega}$ 之傅立葉逆轉換 $f(x)=?$ (5%)

6. 已知$u(x-a)$為單位步階函數，即 $u(x-a)=\begin{cases}1, & x>a\\ 0, & x<a\end{cases}$ $(a>0)$

(1) 請畫出 $p(x)=u(x+a)-u(x-a)$之圖形，並求其傅立葉轉換$P(\omega)$。 (6%)

(2) 已知函數$g(x)=\begin{cases}0, & x<2 \;\; and \;\; x>8\\ 3, & 2\le x\le 8\end{cases}$，試以單位步階函數來表示。 (3%)

(3) 函數 $f(x-5)=g(x)$請畫出 $f(x)$之圖形，並求其傅立葉轉換$F(\omega)$。 (6%)

(4) 試求函數$g(x)$傅立葉轉換$G(\omega)$。 (5%)

(5) 試問 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 3\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (4%)

(6) 試將微分方程 $y''(x)+4y'(x)+3y(x)=2\delta'(x)$做傅立葉轉換，並求$Y(\omega)=?$ (5%)

(7) 試問 $y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=?$ (5%)

7. 已知 $f(t)=e^{t}u(t)$ ， $g(t)=tu(t)$ ，試計算 $f(t)*g(t)$ 。 (7%)

傳立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx\,,\ \ a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx\,,\ \ b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傳立葉級數之 **Parseval** 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傳立葉積分

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$, $B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$

傳立葉複數形式級數展開

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}$, 其中 $\omega_n=\frac{2n\pi}{T}$, $c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$

傳立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傳立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傳立葉轉換的 **Parseval** 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$

Convolution : $f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)\Rightarrow\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式: $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, $\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$

參考解答:

1. 已知函數 $f(x)=3\sin x-4\sin x\cos^2 x$，試求 $f(x)$ 的傅立葉級數。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3\sin x-4\sin x\cos^2 x \\
&= 3\sin x-4\sin x(1-\sin^2 x) \\
&= 2\sin x-(3\sin x-4\sin^3 x) \\
&= 2\sin x-\sin 3x
\end{aligned}
$$

故可知此函數之週期為 2π

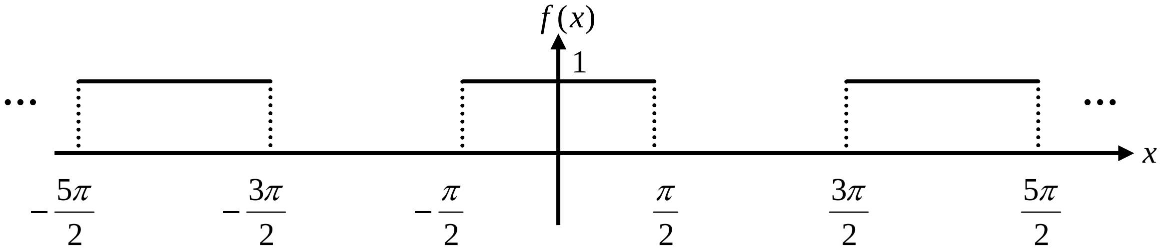
$$\therefore \text{由傅立葉級數: } f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}$$

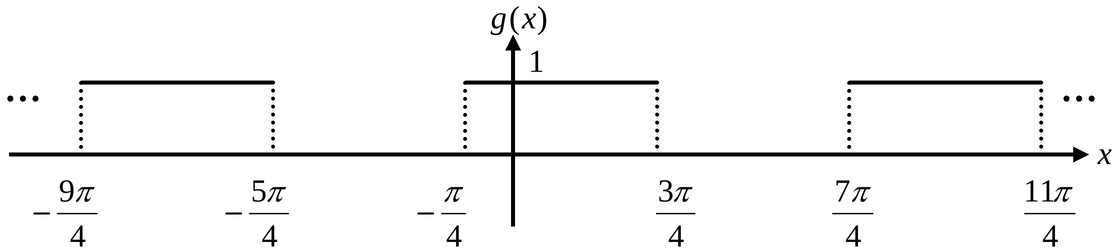
$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

比較係數後可得: $a_0=a_n=0$ ， $b_1=2$ ， $b_3=-1$ ， $b_n=0$ $(n\neq 1,3)$

$\therefore$ 其傅立葉級數為 $f(x)=2\sin x-\sin 3x$

2. 週期函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形如下:





(1) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數。 (8%)

(2) 若 $f(x)$ 的傅立葉級數為 $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega_0 x)+b_n\sin(n\omega_0 x)$，

而 $g(x)$ 的傅立葉級數為 $A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 x)+B_n\sin(n\omega_0 x)$，

試求 A_0, A_n, B_n 與 a_0, a_n, b_n 之間的關係。 (6%)

(1) 由圖形可知 $f(x)=\begin{cases}1, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & x<-\frac{\pi}{2}\ \ and\ \ \frac{\pi}{2}<x\end{cases}$ 且 $f(x)=f(x+2\pi)$

可知 $f(x)$ 為偶函數

$$\therefore\ f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}$$ （已知 $T=2\pi$，$b_n=0$）

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{1}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2})\cos nx=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n(x-\frac{\pi}{4})$$

(2) 由圖可知 $g(x)=f(x-\frac{\pi}{4})$

$$\therefore\ g(x)=f(x-\frac{\pi}{4})=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n(x-\frac{\pi}{4})$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\cos\frac{n\pi}{4}\cdot\cos nx+\sin\frac{n\pi}{4}\cdot\sin nx)$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{4}\cdot\cos nx+a_n\sin\frac{n\pi}{4}\cdot\sin nx)$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$$

比較係數後可得: $A_0=a_0$，$A_n=a_n\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$，$B_n=a_n\cdot\sin\frac{n\pi}{4}$

3. 給一週期函數 $f(x)=x+\pi$，$-\pi<x<\pi$ 且 $f(x)=f(x+2\pi)$

(1) 試求其傅立葉級數展開。 (8%)

(2) 試求 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=$? (4%)

(1) $$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}$$ （已知 $T=2\pi$）

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\,dx=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cdot\cos nx\,dx=0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cdot\sin nx\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\therefore\quad f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

(2) 當 $x = \frac{\pi}{2}$ 時

$$f(\frac{\pi}{2}) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

即 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots = \frac{\pi}{4}$

4. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

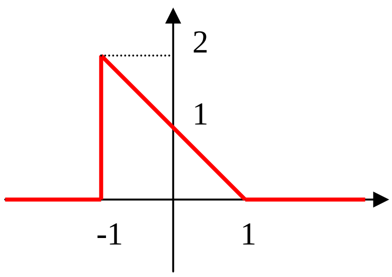
(1) 試求函數 $f(x)$ 的傅立葉積分表示式。 (8%)

(2) 試問 $\int_0^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x}dx = ?$ (4%)

(1) $f(x) = \int_0^{\infty}[A(\omega)\cos(\omega x) + B(\omega)\sin(\omega x)]d\omega$

其中 $A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$

$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx$



又 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

$$\therefore\quad A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x)\cos(\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi\omega}\sin\omega$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x)\sin(\omega x)\,dx = \frac{2}{\pi\omega^2}(\omega\cos\omega - \sin\omega)$$

$\therefore$ $f(x)$ 之傅立葉積分為

$$f(x) = \int_0^{\infty}\frac{2}{\pi\omega}[\sin\omega\cdot\cos(\omega x) + \frac{1}{\omega}(\omega\cos\omega - \sin\omega)\cdot\sin(\omega x)]d\omega$$

當 $x = 1$ 時，

$$\int_0^{\infty}\frac{2}{\pi\omega}[\sin\omega\cdot\cos(\omega) + \frac{1}{\omega}(\omega\cos\omega - \sin\omega)\cdot\sin(\omega)]d\omega = 0$$

當 $x=-1$ 時，

$$\int_0^\infty \frac{2}{\pi\omega}[\sin\omega\cdot\cos(\omega)-\frac{1}{\omega}(\omega\cos\omega-\sin\omega)\cdot\sin(\omega)]\,d\omega=\frac{f(1^+)+f(1^-)}{2}=1$$

兩式相加可得 $\int_0^\infty \frac{4}{\pi\omega}\sin\omega\cdot\cos(\omega)\,d\omega=1$

$$\Rightarrow\int_0^\infty \frac{2\sin\omega\cdot\cos(\omega)}{\omega}d\omega=\int_0^\infty\frac{\sin(2\omega)}{\omega}d\omega=\int_0^\infty\frac{\sin(2x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

5. (1) **試求** $h(x)=e^{-ax}u(x)$ **之傅立葉轉換** $H(\omega)$ **，其中** $a>0$ **。 (5%)**

(2) **試求** $g(x)=xe^{-ax}u(x)$ **之傅立葉轉換** $G(\omega)$ **。 (5%)**

(3) **試求** $F(\omega)=\dfrac{e^{-3(i\omega+4)}}{16-\omega^2+8i\omega}$ **之傅立葉逆轉換** $f(x)=?$ **(5%)**

(1) $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^\infty e^{-ax}u(x)e^{-i\omega x}dx=\int_0^\infty e^{-(a+i\omega)x}dx$

$$=-\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{a+i\omega}$$

(2) 由 $\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\dfrac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)$ 可知

$$\mathcal{F}[g(x)]=\mathcal{F}[xe^{-ax}u(x)]=i\frac{d}{d\omega}(\frac{1}{a+i\omega})=\frac{1}{(a+i\omega)^2}$$

(3) $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{e^{-3(i\omega+4)}}{16-\omega^2+8i\omega}]=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{e^{-12}\cdot e^{-i3\omega}}{(4+i\omega)^2}]$

$$=e^{-12}\mathcal{F}^{-1}[\frac{e^{-i3\omega}}{(4+i\omega)^2}]$$
$$=e^{-12}[(x-3)e^{-4(x-3)}u(x-3)]$$
$$=e^{-4x}(x-3)u(x-3)$$

6. **已知** $u(x-a)$ **為單位步階函數，即** $u(x-a)=\begin{cases}1, & x>a\\ 0, & x<a\end{cases}$ **(** $a>0$ **)**

(1) **請畫出** $p(x)=u(x+a)-u(x-a)$ **之圖形，並求其傅立葉轉換** $P(\omega)$ **。 (6%)**

(2) **已知函數** $g(x)=\begin{cases}0, & x<2 \ \ and \ \ x>8\\ 3, & 2\le x\le 8\end{cases}$ **，試以單位步階函數來表示。 (3%)**

(3) **函數** $f(x-5)=g(x)$ **請畫出** $f(x)$ **之圖形，並求其傅立葉轉換** $F(\omega)$ **。 (6%)**

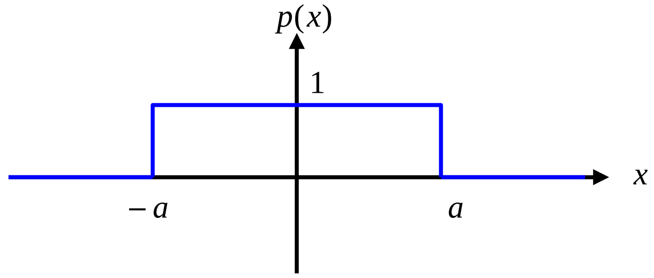
(4) **試求函數** $g(x)$ **傅立葉轉換** $G(\omega)$ **。 (5%)**

(5) **試問** $\int_{-\infty}^\infty \dfrac{\sin^2 3\omega}{\omega^2}d\omega=?$ **(4%)**

(6) **試將微分方程** $y''(x)+4y'(x)+3y(x)=2\delta'(x)$ **做傅立葉轉換，並求** $Y(\omega)=?$ **(5%)**

(7) **試問** $y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=?$ **(5%)**

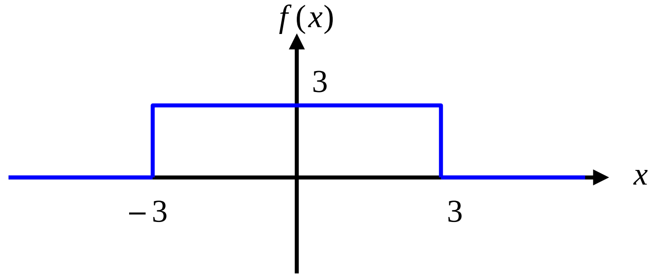
(1)



$$P(\omega)=\mathcal{F}[p(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)e^{-i\omega x}\,dx=\int_{-a}^{a}e^{-i\omega x}\,dx=2\int_{0}^{a}\cos\omega x\,dx=\frac{2\sin(a\omega)}{\omega}$$

(2) $g(x)=3u(x-2)-3u(x-8)$

(3) $f(x-5)=g(x)\ \Rightarrow f(x)=g(x+5)=3u(x+3)-3u(x-3)$



$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx=3\int_{-3}^{3}e^{-i\omega x}\,dx=6\int_{0}^{3}\cos\omega x\,dx=\frac{6\sin3\omega}{\omega}$$

(4) $g(x)=f(x-5)$

$$\Rightarrow G(\omega)=\mathcal{F}[g(x)]=\mathcal{F}[f(x-5)]=e^{-i5\omega}\cdot F(\omega)=\frac{6e^{-i5\omega}\cdot\sin3\omega}{\omega}$$

(5) 傅立葉轉換的 Parseval 恆等式可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$

$$\Rightarrow 9\int_{-3}^{3}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{36}{\omega^2}\sin^2 3\omega\,d\omega$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 3\omega}{\omega^2}d\omega=3\pi$$

(6) $\mathcal{F}[y''(x)+4y'(x)+3y(x)]=\mathcal{F}[2\delta'(x)]$

$$\Rightarrow(i\omega)^2Y(\omega)+4i\omega Y(\omega)+3Y(\omega)=2i\omega$$

$$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{2i\omega}{-\omega^2+4i\omega+3}$$

(6) 由(2)的結果可知

$$y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{2i\omega}{-\omega^2+4i\omega+3}]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{2i\omega}{(1+i\omega)(3+i\omega)}]$$

$$=\mathcal{F}^{-1}[\frac{3}{3+i\omega}-\frac{1}{1+i\omega}]=(3e^{-3t}-e^{-t})u(t)$$

7. 已知 $f(t)=e^{t}u(t)$ ， $g(t)=tu(t)$ ，試計算 $f(t)*g(t)$ 。 (7%)

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau}u(\tau)(t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{0}^{t} e^{\tau}(t-\tau)\,d\tau$$

$$=(te^{\tau}-\tau e^{\tau}+e^{\tau})\Big|_{0}^{t}$$

$$=(te^{t}-te^{t}+e^{t})-(t-0+1)$$

$$=e^{t}-t-1$$