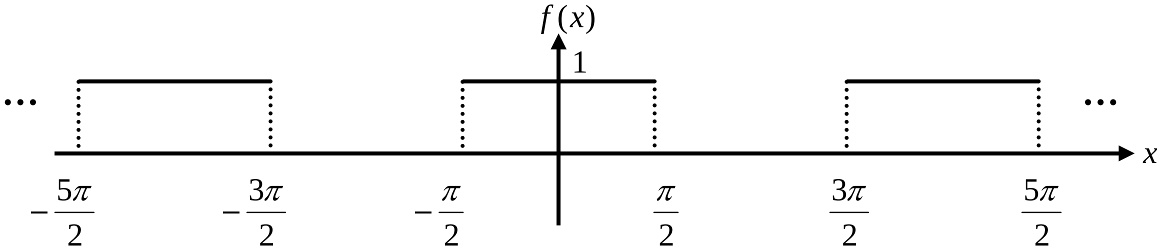
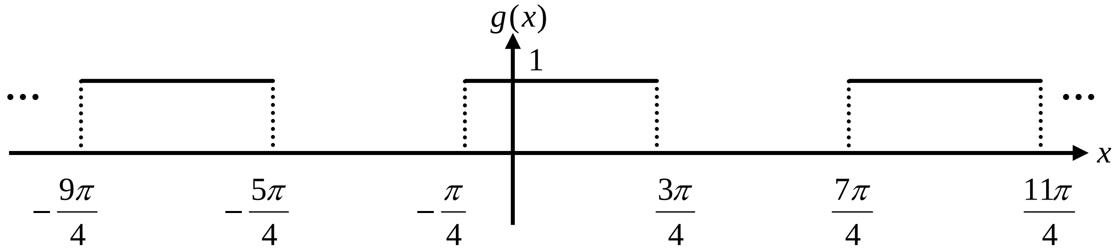
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2018 工程數學(二) 第二次大考

系級：_______________　　學號：_____________　　姓名：____________

1. 已知函數 $f(x)=3\sin x-4\sin x\cos^2 x$，試求 $f(x)$ 的傅立葉級數。 (6%)

2. 週期函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形如下:





(1) 試求 $f(x)$ 的傅立葉級數。 (8%)

(2) 若 $f(x)$ 的傅立葉級數為 $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(n\omega_0 x\right)+b_n\sin\left(n\omega_0 x\right)$，

而 $g(x)$ 的傅立葉級數為 $A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(n\omega_0 x\right)+B_n\sin\left(n\omega_0 x\right)$，

試求 $A_0,\ A_n,\ B_n$ 與 $a_0,\ a_n,\ b_n$ 之間的關係。 (6%)

3. 給一週期函數 $f(x)=x+\pi,\ -\pi<x<\pi$ 且 $f(x)=f(x+2\pi)$

(1) 試求其傅立葉級數展開。 (8%)

(2) 試求 $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots=$? (4%)

4. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}1-x, & -1\le x\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

(1) 試求函數 $f(x)$ 的傅立葉積分表示式。 (8%)

(2) 試問 $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin(2x)}{x}dx=$? (4%)

5. (1) 試求 $h(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $H(\omega)$，其中 $a>0$。 (5%)

(2) 試求 $g(x)=xe^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $G(\omega)$。 (5%)

(3) 試求 $F(\omega)=\dfrac{e^{-3(i\omega+4)}}{16-\omega^2+8i\omega}$ 之傅立葉逆轉換 $f(x)=$? (5%)

6. 已知$u(x-a)$為單位步階函數，即 $u(x-a)=\begin{cases}1, & x>a \\ 0, & x<a\end{cases}$ $(a>0)$

(1) 請畫出 $p(x)=u(x+a)-u(x-a)$之圖形，並求其傅立葉轉換$P(\omega)$。 (6%)

(2) 已知函數$g(x)=\begin{cases}0, & x<2 \;\; and \;\; x>8 \\ 3, & 2\le x\le 8\end{cases}$，試以單位步階函數來表示。 (3%)

(3) 函數 $f(x-5)=g(x)$請畫出 $f(x)$之圖形，並求其傅立葉轉換$F(\omega)$。 (6%)

(4) 試求函數$g(x)$傅立葉轉換$G(\omega)$。 (5%)

(5) 試問 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 3\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (4%)

(6) 試將微分方程 $y''(x)+4y'(x)+3y(x)=2\delta'(x)$做傅立葉轉換，並求$Y(\omega)=?$ (5%)

(7) 試問 $y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=?$ (5%)

7. 已知 $f(t)=e^t u(t)$ ， $g(t)=tu(t)$ ，試計算 $f(t)*g(t)$ 。 (7%)

傳立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傳立葉級數之 **Parseval** 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傳立葉積分

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$, $B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$

傳立葉複數形式級數展開

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}$, 其中 $\omega_n=\frac{2n\pi}{T}$, $c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$

傳立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傳立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傳立葉轉換的 **Parseval** 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2d\omega$

Convolution : $f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)\Rightarrow\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式**:** $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$, $\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$