國立臺灣海洋大學河海工程學系 2018 工程數學(二) 第一次大考

系級：＿＿＿＿＿＿＿＿　　學號：＿＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿

1. 已知 $f = xz - yz$，$\vec{A} = y^2\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j} + 2z^2\vec{k}$，試求:

   (1) $\nabla^2(xz\,f)$ (2) $\nabla\cdot(\nabla f)$ (3) $\nabla\times\vec{A}$ (4) $\nabla(\nabla\cdot\vec{A})$ (12%)

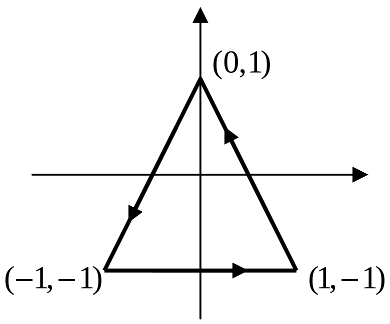
2. 已知一質點的運動軌跡為 $\vec{r}(t) = t^2\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j} + \cos t\,\hat{k}$，試求其速度、速率、加速度、切線加速度與法線加速度。 (10%)

3. 某應力場 $S(x,y,z)$ 之大小與 (x,y,z) 距座標原點之距離成反比。已知 $S(1,1,1) = 10\sqrt{3}$，B 點座標為 $B(-1,3,4)$，A 點座標為 $A(1,2,2)$，求 $S(x,y,z)$ 在 A 點沿著 $\overrightarrow{AB}$ 之應力變化率。 (10%)

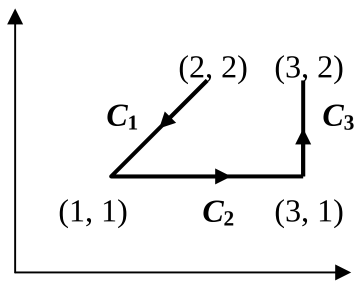
4. 已知一 2 維空間向量場

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + x^2\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2} - 2y\right)\vec{j}$$

   求閉合曲線線積分 $I = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ 之值，其中 C 為三角形逆時鐘閉合曲線如圖一所示，$\vec{r}$ 表示 C 之位置向量。 (10%)



圖一



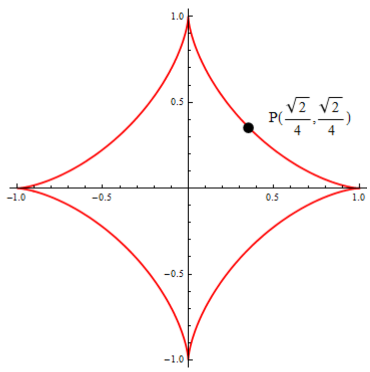
圖二

5. 試求線積分 $I = \int_C 2xy\,dx + (x^2 - 3y^2)\,dy$，其中曲線 C 如圖二所示。 (10%)

6. 平面曲線方程式 $\Gamma: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 與曲線上一點 $P(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ 如圖三所示。

   (1) 請計算曲線繞一圈之總弧長。 (5%)

   (2) 求曲線上 P 點之曲率。 (5%)



圖三

7. 請參考下圖，並回答下列各題：

其中，$\vec{F}=x\,\vec{i}+(2z-x)\,\vec{j}-y^2\,\vec{k}$，$S=S_1+S_2+S_3+S_4$，

$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$

(1) $\vec{F}$ 是否為保守場？請說明之。**(5%)**

(2) $\vec{n}_4$ 為斜面 S_4 上的單位法向量，試問：$\vec{n}_4=?$ 並求斜面 S_4 的方程式。**(8%)**

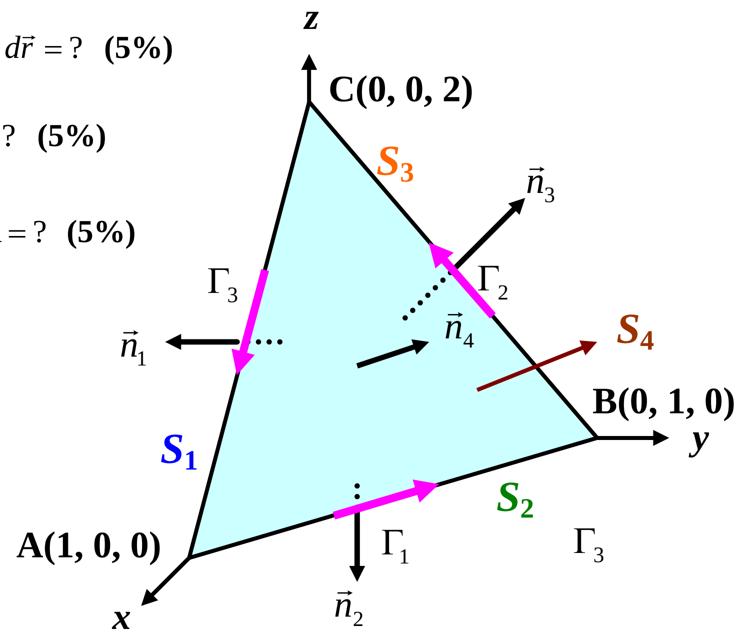
(3) 斜面 S_4 的面積為何？**(5%)**

(4) $\oint\!\!\!\oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=?$ **(5%)**

(5) 請使用線積分計算 $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ **(5%)**

(6) 請計算 $\iint_{S_4}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ **(5%)**

(7) 請計算 $\iint_{S_1+S_2+S_3}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ **(5%)**



Hint:

Gauss 散度定理：$\iiint \nabla\cdot\vec{F}\,dV=\oint\!\!\!\oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,dA$ **(3D)**

$$\iint \nabla\cdot\vec{F}\,dA=\oint \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds \quad \textbf{(2D)}$$

格林定理：$\int P\,dx+Q\,dy=\iint(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$

Stokes 旋度定理：$\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$

曲率：$\kappa=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}$　　扭率：$\tau=\left|\dfrac{d(\vec{T}(s)\times\vec{N}(s))}{ds}\right|$

二倍角公式：$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$，$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

四面體體積：$V=\dfrac{1}{3}A_0 h$，（A_0：底面積；h：高）