國立臺灣海洋大學河海工程學系 2018 工程數學(二) 期末考

系級：__________ 學號：__________ 姓名：__________

1. 試求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換為何? (20%)

   (1) $f(t)=\sin t\cosh 2t$ (2) $f(t)=t\sinh 2t$ (3) $f(t)=\cos^2 t$ (4) $f(t)=\cos^3 t$

2. 試求下列 $F(s)$ 的拉普拉斯逆轉換為何? (25%)

   (1) $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+w^2)}$ (2) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+w^2)}$ (3) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+w^2)^2}$

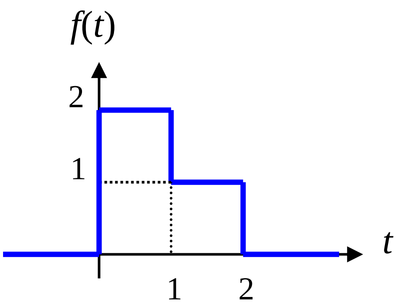
   (4) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+w^2+2ws}$ (5) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+w^2+ws}$

3. (1) 單位步階函數(unit step function)定義為

$$u(t-a)=\begin{cases}1, & t>a\\ 0, & t<a\end{cases}$$

   其中 a 為常數，試求 $u(t-5)$ 之拉普拉斯轉換。 (5%)

   (2) 試以單位步階函數之組合來表示下圖 $f(t)$ 之函數。 (5%)



   (3) 試求 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換，即 $F(s)=?$ (5%)

4. 試以拉普拉斯轉換法求解下述方程式。 (20%)

   (1) $y'(t)=\cos t+\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau$ 且 $y(0)=1$

   (2) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=3\delta(x-2)$ 且 $y'(0)=y(0)=0$

5. 試求解下述聯立微分方程組 (10%)

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=-y_1-y_2\\ \dfrac{dy_2}{dt}=y_1-y_2\end{cases}$$ 且 $y_1(0)=0$ 與 $y_2(0)=1$

6. 若 $f(t)=2\sin 2t$ ， $g(t)=\cos 2t$ ，試求 $f(t)*g(t)$ 。(10%)

拉普拉斯轉換： $F(s)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$

第一平移定理： $\mathcal{L}[e^{at} f(t)]=F(s-a)$

第二平移定理： $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)]=e^{-as}F(s)$

尺度變換： $\mathcal{L}[f(at)]=\dfrac{1}{a}F(\dfrac{s}{a})$

微分函數的拉普拉斯轉換： $\mathcal{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0)$

$$\mathcal{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$$

積分函數的拉普拉斯轉換： $\mathcal{L}[\int_0^t f(x)\,dx]=\dfrac{F(s)}{s}$

$$\mathcal{L}[\int_0^t\int_0^t f(x)\,dx\,dx\,]=\frac{F(s)}{s^2}$$

拉普拉斯轉換的微分： $\mathcal{L}[tf(t)]=(-1)\dfrac{d}{ds}F(s)$

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

拉普拉斯轉換的積分： $\mathcal{L}[\dfrac{f(t)}{t}]=\int_s^{\infty} f(\tau)\,d\tau$

$$\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t^2}]=\int_s^{\infty}\int_{\gamma}^{\infty} f(\tau)\,d\tau\,d\gamma$$

摺積： $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$

雙曲函數： $\cosh at=\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}$

$$\sinh at=\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$$