國立臺灣海洋大學河海工程學系 2017 工程數學(一) 第二次大考參考解答

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 試問微分方程式 $y^{(4)}+y'''=1-x^2e^{-x}$ 的特解為何種形式? (5%)

   (a) $y_p=A+Bx^2e^{-x}+Cxe^{-x}+De^{-x}$

   (b) $y_p=Ax+Bx^2e^{-x}+Cxe^{-x}+De^{-x}$

   (c) $y_p=Ax^2+Bx^2e^{-x}+Cxe^{-x}+De^{-x}$

   (d) $y_p=Ax^2+Bx^3e^{-x}+Cx^2e^{-x}+Dxe^{-x}$

   (e) 以上皆非

2. 考慮下述三條微分方程式

   (a) $y''(t)+9y(t)=0$ (b) $y''(t)-9y(t)=0$ (c) $y''(t)+6y'(t)+9y(t)=0$

   試問:

   (1) 當 $t\to\infty$，何者會產生週期性振動的解? (4%)

   (2) 當 $t\to\infty$，何者的解會衰減到零? (4%)

   (3) 當 $t\to\infty$，何者會產生無窮大的解? (4%)

3. 已知 $e^x\cos x$ 與 $e^x\sin x$ 為下述常係數線性微分方程的 2 個補解

$$y''(x)+ay'(x)+by(x)=2e^x\cos x$$

   (1) 試問常數 a 與 b 為何? (6%)

   (2) 試求此微分方程之通解。 (6%)

4. 試求下述微分方程之通解

   (1) $y^{(5)}-3y^{(4)}+3y'''-y''=0$ (8%)

   (2) $y''+3y'+2y=\dfrac{e^{-x}}{e^x+1}$ (8%)

   (3) $xy''+(x+2)y'+y=0$ (8%)

5. 已知一微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2y}{x}\right)-\dfrac{4y}{x^2}=1$ $(x>0)$

   (1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x)=$? (6%)

   (2) 以變數變換，令 $t=\ln x$，則 $y(x)=Y(t)$，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (6%)

   (3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t)=$? (6%)

   (4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t)=$? (6%)

   (5) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$。 (3%)

6. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$，若給定質量塊 $m=2$，阻尼係數 $c=0$ 與彈簧常數 $k=8$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0)=0$ 與 $\dot{y}(0)=0$，給一外力為 $f(t)=2\sin\omega t$

試問:

(1) 當 $\omega=?$，此系統會產生共振行為。 (4%)

(2) 當系統產生共振時，此時其解為何? (8%)

7. 已知微分方程式 $xy''+2y'+xy=0$ 有一解為 $y_1=x^{-1}\cos x$，試求另一解 y_2。(8%)

參考解答:

1. 試問微分方程式 $y^{(4)}+y'''=1-x^2e^{-x}$ **的特解為何種形式? (5%)**

(*a*) $y_p=A+Bx^2e^{-x}+Cxe^{-x}+De^{-x}$

(*b*) $y_p=Ax+Bx^2e^{-x}+Cxe^{-x}+De^{-x}$

(*c*) $y_p=Ax^2+Bx^2e^{-x}+Cxe^{-x}+De^{-x}$

(*d*) $y_p=Ax^2+Bx^3e^{-x}+Cx^2e^{-x}+Dxe^{-x}$

(*e*) 以上皆非

令 $y_h=e^{\lambda x}$

特徵方程式為 $\lambda^4-\lambda^3=0 \Rightarrow \lambda=0,0,0,-1$

$y_h=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4e^{-x}$

由待定係數法可猜特解為 $y_p=A+(Bx^2+Cx+D)e^{-x}$

但由於常數項 A 與 De^{-x} 項與非齊次項相同，故須修正

$\therefore\ y_p=Ax^3+(Bx^2+Cx+D)xe^{-x}$

故選(e)

2. 考慮下述三條微分方程式

(a) $y''(t)+9y(t)=0$ **(b)** $y''(t)-9y(t)=0$ **(c)** $y''(t)+6y'(t)+9y(t)=0$

試問:

(1) 當 $t\to\infty$ **，何者會產生週期性振動的解? (4%)**

(2) 當 $t\to\infty$ **，何者的解會衰減到零? (4%)**

(3) 當 $t\to\infty$ **，何者會產生無窮大的解? (4%)**

(a) $y(t)=c_1\cos 3t+c_2\sin 3t$

(b) $y(t)=c_1e^{-3t}+c_2e^{3t}$

(c) $y(t)=c_1e^{-3t}+c_2te^{-3t}$

(1) 當 $t\to\infty$ ，(a)的解會產生週期性振動

(2) 當 $t\to\infty$ ，$\lim_{t\to\infty} te^{-3t}=0 \Rightarrow$ (c)的解會衰減到零

(3) 當 $t\to\infty$ ，(b)的解變成無窮大

3. 已知 $e^x\cos x$ 與 $e^x\sin x$ 為下述常係數線性微分方程的 2 個補解

$$y''(x)+ay'(x)+by(x)=2e^x\cos x$$

(1) 試問常數 a 與 b 為何? (6%)

(2) 試求此微分方程之通解。 (6%)

(1) $e^x\cos x$ 與 $e^x\sin x$ 為常係數線性 ODE 之 2 補解，故可知 $\lambda=1\pm i$

特徵方程式為 $[\lambda-(1+i)][\lambda-(1-i)]=0 \quad \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+2=0$

$\Rightarrow y''-2y'+2y=0$

$\therefore$ 可知 $a=-2$ ，$b=2$

(2) 由待定係數法猜特解 $y_p=xe^x(A\cos x+B\sin x)=xy_h$

$$\Rightarrow y_p'=y_h+xy_h'$$

$$\Rightarrow y_p''=y_h'+y_h'+xy_h''=2y_h'+xy_h''$$ 代回 ODE 可得

$$(2y_h'+xy'')-2(y_h+xy_h')+2xy_h=2e^x\cos x$$

$$\Rightarrow 2y_h'-2y_h=2e^x\cos x$$

$$\Rightarrow e^x(-A\sin x+B\cos x)=e^x\cos x$$

$\therefore \quad A=0,\ B=1$

通解: $y(x)=c_1e^x\cos x+c_2e^x\sin x+xe^x\sin x$

4. 試求下述微分方程之通解

(1) $y^{(5)}-3y^{(4)}+3y'''-y''=0$ **(8%)**

(2) $y''+3y'+2y=\dfrac{e^{-x}}{e^x+1}$ **(8%)**

(3) $y''+(\sin x)\cdot y'+(\cos x)\cdot y=0$ **(8%)**

(1) 令 $y=e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^5-3\lambda^4+3\lambda^3-\lambda^2=0$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda-1)^3=0$

$\Rightarrow \lambda=0,0,1,1,1$

$\therefore\ y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4xe^x+c_5x^2e^x$

(2) $y''+3y'+2y=\dfrac{e^{-x}}{e^x+1}$ **(8%)**

令 $y_h=e^{\lambda x} \quad \Rightarrow \lambda^2+3\lambda+2\lambda=0 \quad \Rightarrow \lambda=-1,-2$

$\therefore\ y_h=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

由參數變異法，令 $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ （$y_1 = e^{-x}$，$y_2 = e^{-2x}$）

$$\Rightarrow y_p' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \quad (\text{令 } u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0)$$

$$\Rightarrow y_p'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' \quad \text{代回 ODE 可得}$$

$$(u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'') + 3(u_1 y_1' + u_2 y_2') + 2(u_1 y_1 + u_2 y_2) = \frac{e^{-x}}{e^x + 1}$$

$$\Rightarrow u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{e^{-x}}{e^x + 1}$$

$$\therefore \quad u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \dfrac{e^{-x}}{e^x+1} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \dfrac{e^{-x}}{e^x+1} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{-\dfrac{e^{-3x}}{e^x+1}}{-e^{-3x}} = \frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \dfrac{e^{-x}}{e^x+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{e^{-x}}{e^x+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{e^{-2x}}{e^x+1}}{-e^{-3x}} = -\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\Rightarrow u_1 = x - \ln(e^x + 1), \quad u_2 = -\ln(e^x + 1)$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = e^{-x}[x - \ln(e^x + 1)] - e^{-2x}\ln(e^x + 1)$$

$$= xe^{-x} - (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1)$$

$$\therefore y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + xe^{-x} - (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1)$$

(3) $xy'' + (x+2)y' + y = 0$ (7%)

令 $a_2 = x$，$a_1 = x + 2$，$a_0 = 1$

由判斷式：$a_2'' - a_1' + a_0 = 0$ 可知此為正合式

$$xy'' + (x+2)y' + y = \frac{d}{dx}[b_1(x)y' + b_0(x)y]$$

$$\Rightarrow b_1(x)y'' + [b_1'(x) + b_0(x)] + b_0'(x)y = xy'' + (x+2)y' + y$$

$$\Rightarrow b_1 = x, \quad b_0 = x + 1$$

$$\therefore \quad xy'' + (x+2)y' + y = \frac{d}{dx}[xy' + (x+1)y] = 0$$

$$\Rightarrow \quad xy' + (x+1)y = c_1 \qquad \text{此為一階線性 ODE}$$

$$\Rightarrow \quad y' + \frac{x+1}{x}y = c_1 \frac{1}{x}$$

積分因子：$\mu = e^{\int \frac{x+1}{x}dx} = e^{(x + \ln x)} = xe^x$

同乘積分因子: $xe^x y' + e^x(x+1)y = c_1 e^x$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xe^x y) = c_1 e^x$$

$$\Rightarrow xe^x y = c_1 e^x + c_2$$

$$\Rightarrow y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{e^{-x}}{x}$$

5. 已知一微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d}{dx}(\frac{2y}{x}) - \frac{4y}{x^2} = 1$ **(** $x > 0$ **)**

(1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x) = ?$ **(6%)**

(2) 以變數變換，令 $t = \ln x$ **，則** $y(x) = Y(t)$ **，試求轉換後以** $Y(t)$ **表示的微分方程式。 (6%)**

(3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t) = ?$ **(6%)**

(4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t) = ?$ **(6%)**

(5) 試將 $Y(t)$ **轉換回** $y(x)$ **。 (3%)**

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d}{dx}(\frac{2y}{x}) - \frac{4y}{x^2} = 1 \Rightarrow y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2y}{x^2} - \frac{4}{x^2}y = 1$

$$\Rightarrow x^2 y'' + 2xy' - 6y = x^2$$

$\therefore$ 此為 Euler ODE

令 $y = x^m$

$m(m-1)x^m + 2mx^m - 6x^m = 0$

$\Rightarrow m^2 + m - 6 = 0$

$\Rightarrow m = 2, -3$

$\therefore \quad y_h = c_1 x^2 + c_2 x^{-3}$

(2) 令 $t = \ln x \quad \Rightarrow x = e^t$

$\therefore y(x) = y(e^t) = Y(t)$

$$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{dY(t)}{dx} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{x}Y'(t)$$

$$y''(x) = \frac{dy'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}Y'(t)) = -\frac{1}{x^2}Y'(t) + \frac{1}{x}\frac{dY'(t)}{dx} = \frac{1}{x^2}[Y''(t) - Y'(t)]$$

將 $y'(x)$ 與 $y''(x)$ 代回 ODE 可得 $\Rightarrow x^2 y'' + 2xy' - 6y = x^2$

$$x^2 \cdot \frac{1}{x^2}[Y''(t) - Y'(t)] + 2x \cdot \frac{1}{x}Y'(t) - 6Y(t) = e^{2t}$$

$$\Rightarrow Y''(t) + Y'(t) - 6Y(t) = e^{2t}$$

(3) ∵ 此為常係數 ODE

∴ 令 $Y(t)=e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

$$(\lambda^2+\lambda-6)e^{\lambda x}=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2+\lambda-6=0$$

$$\Rightarrow \lambda=2,-3$$

$$\therefore\ Y_h=c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}$$

(4) 由待定係數法，令 $Y_P=Ate^{2t}$

$$\Rightarrow Y_P'=A(2t+1)e^t$$

$$\Rightarrow Y_P''=A(4t+4)e^t$$

$$A(4t+4)e^t+A(2t+1)e^t-6Ate^t=e^{2t}$$

代回 ODE 可得 $A=\dfrac{1}{5}$

$$\therefore\ Y_P=\frac{1}{5}te^{2t}$$

(5) $Y(t)=Y_h(t)+Y_p(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-3t}+\dfrac{1}{5}te^{2t}$

$$\Rightarrow y(x)=c_1x^2+c_2x^{-3}+\frac{1}{5}x^2\ln x$$

6. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$，若給定質量塊 $m=2$，阻尼係數 $c=0$ 與彈簧常數 $k=8$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0)=0$ 與 $\dot{y}(0)=0$，給一外力為 $f(t)=2\sin\omega t$

試問:

(1) 當 $\omega=?$，此系統會產生共振行為。 (4%)

(2) 當系統產生共振時，此時其解為何? (8%)

(1) $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$ 又 $m=2$, $c=0$, $k=8$ 與 $f(t)=2\sin\omega t$

$$\therefore\ 2\ddot{y}(t)+8y(t)=2\sin\omega t$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}=2$$

當 $\omega=\omega_n=2$ 時，系統會產生共振現象。

(2) $2\ddot{y}(t)+8y(t)=2\sin 2t$

令 $y(t)=e^{\lambda t}$ 代入 ODE 可得

$$(2\lambda^2+8)e^{\lambda x}=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2+4=0 \quad \Rightarrow \lambda=2i,-2i$$

$$\therefore\ y_h=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$$

令 $y_p = t(A\cos 2t + B\sin 2t) = t \cdot y_h$

$\dot{y}_p = y_h + t\,\dot{y}_h$

$\ddot{y}_p = \dot{y}_h + \dot{y}_h + t\,\ddot{y}_h = 2\dot{y}_h + t\,\ddot{y}_h$ 代回 ODE 可得

$2(2\dot{y}_h + t \cdot \ddot{y}_h) + 8t \cdot y_h = 2\sin 2t$

$\Rightarrow 4\dot{y}_h = 2\sin 2t$

$\Rightarrow 8(-A\sin 2t + B\cos 2t) = 2\sin 2t$

$\therefore\ A = -\dfrac{1}{4},\ B = 0$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t - \dfrac{1}{4}t \cdot \cos 2t$

又 $y(0) = 0 \quad \Rightarrow c_1 = 0$

$\dot{y}(0) = 0 \quad \Rightarrow c_2 = \dfrac{1}{8}$

$\therefore\ y(t) = \dfrac{1}{8}\sin 2t - \dfrac{1}{4}t \cdot \cos 2t$

7. 已知微分方程式 $xy'' + 2y' + xy = 0$ 有一解為 $y_1 = x^{-1}\cos x$，試求另一解 y_2。(8%)

$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad \Rightarrow y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$

且滿足 $W' + \dfrac{2}{x}W = 0 \quad \Rightarrow \dfrac{W'}{W} = -\dfrac{2}{x}$

$\Rightarrow \ln W = -\int \dfrac{2}{x}dx = -2\ln x + \bar{c}_1$

$\Rightarrow W = e^{-2\ln x + \bar{c}_1} = c_1\dfrac{1}{x^2}$

$\therefore\ y_1 y_2' - y_1' y_2 = c_1\dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}\cos x \cdot y_2' + (\dfrac{1}{x^2}\cos x + \dfrac{1}{x}\sin x)y_2 = c_1\dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow x\cos x \cdot y_2' + (\cos x + x\sin x)y_2 = c_1 \longrightarrow$ 為一階線性 ODE

$\Rightarrow y_2' + (\dfrac{1}{x} + \tan x)y_2 = c_1\dfrac{1}{x\cos x}$

積分因子為 $\mu = e^{\int(\frac{1}{x}+\tan x)dx} = e^{\ln x - \ln|\cos x|} = \dfrac{x}{\cos x}$

同乘積分因子後可得 $\dfrac{x}{\cos x}y_2' + (\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{x\sin x}{\cos^2 x})y_2 = c_1\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\frac{x}{\cos x}y_2) = c_1\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\cos x}y_2 = c_1\tan x + c_2$$

$$\Rightarrow y_2 = c_1\frac{1}{x}\sin x + c_2\frac{1}{x}\cos x$$

$\therefore$ 另一解為 $\dfrac{1}{x}\sin x$