國立臺灣海洋大學河海工程學系 2017 工程數學(一) 第二次大考

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 試問微分方程式 $y^{(4)}+y'''=1-x^2e^{-x}$ 的特解為何種形式? (5%)

   (a) $y_p=A+Bx^2e^{-x}+Cxe^{-x}+De^{-x}$

   (b) $y_p=Ax+Bx^2e^{-x}+Cxe^{-x}+De^{-x}$

   (c) $y_p=Ax^2+Bx^2e^{-x}+Cxe^{-x}+De^{-x}$

   (d) $y_p=Ax^2+Bx^3e^{-x}+Cx^2e^{-x}+Dxe^{-x}$

   (e) 以上皆非

2. 考慮下述三條微分方程式

   (a) $y''(t)+9y(t)=0$ (b) $y''(t)-9y(t)=0$ (c) $y''(t)+6y'(t)+9y(t)=0$

   試問:

   (1) 當 $t\to\infty$，何者會產生週期性振動的解? (4%)

   (2) 當 $t\to\infty$，何者的解會衰減到零? (4%)

   (3) 當 $t\to\infty$，何者會產生無窮大的解? (4%)

3. 已知 $e^x\cos x$ 與 $e^x\sin x$ 為下述常係數線性微分方程的 2 個補解

$$y''(x)+ay'(x)+by(x)=2e^x\cos x$$

   (1) 試問常數 a 與 b 為何? (6%)

   (2) 試求此微分方程之通解。 (6%)

4. 試求下述微分方程之通解

   (1) $y^{(5)}-3y^{(4)}+3y'''-y''=0$ (8%)

   (2) $y''+3y'+2y=\dfrac{e^{-x}}{e^x+1}$ (8%)

   (3) $xy''+(x+2)y'+y=0$ (8%)

5. 已知一微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2y}{x}\right)-\dfrac{4y}{x^2}=1$ $(x>0)$

   (1) 試求此微分方程的補解 $y_h(x)=$? (6%)

   (2) 以變數變換，令 $t=\ln x$，則 $y(x)=Y(t)$，試求轉換後以 $Y(t)$ 表示的微分方程式。 (6%)

   (3) 試求轉換後微分方程的補解 $Y_h(t)=$? (6%)

   (4) 試求轉換後微分方程的特解 $Y_p(t)=$? (6%)

   (5) 試將 $Y(t)$ 轉換回 $y(x)$。 (3%)

6. 已知單自由度振動系統其數學表示為 $m\ddot{y}(t)+c\dot{y}(t)+ky(t)=f(t)$，若給定質量塊 $m=2$，阻尼係數 $c=0$ 與彈簧常數 $k=8$ 並且質量塊為靜止狀態即其初始條件 $y(0)=0$ 與 $\dot{y}(0)=0$，給一外力為 $f(t)=2\sin\omega t$

試問:

(1) 當 $\omega=?$，此系統會產生共振行為。 (4%)

(2) 當系統產生共振時，此時其解為何? (8%)

7. 已知微分方程式 $xy''+2y'+xy=0$ 有一解為 $y_1=x^{-1}\cos x$，試求另一解 y_2。(8%)