國立臺灣海洋大學河海工程學系 2017 工程數學(一) 第一次大考

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. 已知 1 階微分方程式 $y'(x)+y(x)=y^4(x)$ 具有 $u(x,y)=e^{ax}y^b$ 之積分因子

   (1) 試求此積分因子中 a 與 b 之值。(8%)

   (2) 試求此微分方程式之解 $y(x)=?$ (6%)

2. 給一 Clairauts 微分方程式 $(y')^2-xy'+y=0$，試求此微分方程的通解(general solution)與奇解(singular solution)。(10%)

3. 已知微分方程式為 $(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}+2y=(x+1)^2$

   (1) 此微分方程式為線性或非線性? (3%) 並以一階線性法求解。(8%)
   (若為線性，直接求解；若非線性，使用變數變換法轉成線性，再求解)

   (2) 此微分方程式為正合(exact)或非正合? (5%) 並以正合法求解。(8%)
   (若正合，直接求解；若非正合，先求出積分因子，再求解)

4. 已知微分方程式為 $\dfrac{dy}{dx}=x^3(y-x)^2+x^{-1}y,\ x>0$

   (1) 此為何種類型之微分方程式? (3%) 為線性或非線性? (3%)

   (2) 試以觀察法得一特解 S。 (5%)

   (3) 試由變數變換($y=W+S$)將上述 ODE 轉換為以 W 表示之微分方程。 (6%)
   請問:轉換後為何種類型微分方程式。 (3%)

   (4) 試求 $W=?$ 並寫出最後解的表示式($y=W+S$)。 (8%)

5. 試解下列各微分方程

   (1) $[e^{(x+y)}+ye^y]+xe^y\dfrac{dy}{dx}=0$ (8%)

   (2) $(2y+e^y+6x^2)\dfrac{dy}{dx}+4+12xy=0$ (8%)

   (3) $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^3\cos 4x$ (8%)