國立臺灣海洋大學河海工程學系 2017 工程數學(一) 期末考

系級：_____ 學號：_____ 姓名：_____

1. $A=\begin{bmatrix}2&0&9&0&0\\7&1&6&2&8\\9&0&3&3&7\\0&0&2&0&0\\6&0&5&0&1\end{bmatrix}$，**試問:** $\det(A)=?$ **(10%)**

2. 給一矩陣 $A=\begin{bmatrix}r&s&t\\u&v&w\\x&y&z\end{bmatrix}$，**又** $|A|=5$，**試問:**

(1) $|-4A|=?$ **(2)** $|A^{-1}|=?$ **(3)** $|A^{2}|=?$ **(4)** $|A^{T}|=?$ **(5)** $\begin{vmatrix}r&t&s\\u&w&v\\x&z&y\end{vmatrix}=?$

(6) $\begin{vmatrix}2t+5z&2r+5x&2s+5y\\3w&3u&3v\\z&x&y\end{vmatrix}=?$ **(18%)**

3. 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

(1) 試求 A 的特徵值及其對應之特徵向量。 (10%)

(2) 已知函數 $P(x)=x^3+3x^2-3x-1$，**試以矩陣對角化法求解** $P(\mathbf{A})$。 **(6%)**

4. 已知一矩陣 A 及向量 x、b 分別為:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-4&-2\\2&2&6\\0&1&1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\ \text{及}\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

(1) 試求 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ **之解 x，其中 0 表零向量。 (8%)**

(2) 試問 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ **是否有解? 請說明有解或無解之理由。 (8%)**

5. 給方程式 $4x_1^2+12x_1x_2+13x_2^2=16$，**試問此二次式代表何種圓錐曲線? (10%)**
(請將之轉換至主軸，即將舊座標向量 $\mathbf{x}^T=[x_1\ x_2]$ **轉換至新座標向量** $\mathbf{y}^T=[y_1\ y_2]$**)**

6. 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，試問:

(1) A 的特徵方程為何? **(4%)**

(2) $A^8-2A^6+3A^4+A^2-6I=?$ **(8%)**

(3) 若 $A^{-1}=pA^2+qA+rI$ ，則 $p=?$，$q=?$，$r=?$ **(8%)**

7. 試求解下述聯立微分方程組 **(10%)**

$$y+2\frac{dx}{dt}-3x=0$$

$$2\frac{dy}{dt}-3y+x=4e^t$$

並且滿足 $x(0)=0$ 與 $y(0)=0$