國立臺灣海洋大學河海工程學系 2017 工程數學(二) 第二次大考參考解答

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. (1) 試問當 α 為何，能使 $\{1, x, 1+\alpha x^2\}$ 在區間 $[-1,1]$ 彼此相互正交。 (5%)
   (2) 試將上述函數集合單位化。 (5%)

2. 已知 $f(x)=1+x^2,\ \ 0\le x\le 2$，試繪出 $f(x)$ 經由半幅餘弦展開與半幅正弦展及全幅展開後相對應之圖形。(12%)

3. 給一週期函數 $f(x)=x^2,\ -1<x<1$ 且 $f(x)=f(x+2)$
   (1) 此為奇函數(odd)或偶函數(even)? (2%)
   (2) 試求其傅立葉級數展開。 (6%)
   (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=?$ (4%)
   (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=?$ (4%)
   (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=?$ (4%)
   (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=?$ (4%)

4. (1) 試求函數 $f(t)$ 的傅立葉積分表示式。(8%)

$$f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t\le -1\\ 1+t, & -1<t\le 0\\ 1-t, & 0<t\le 1\\ 0, & 1<t<\infty\end{cases}$$

   (2) 試問 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (4%)

5. 已知 $u(x)$ 為單位步階函數，即 $u(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$
   (1) 請畫出 $g(x)=u(x+2)-u(x-2)$ 之圖形，並求其傅立葉轉換 $G(\omega)=?$ (8%)
   (2) 試問 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 2\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (4%)
   (3) 試求 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$。 (5%)
   (4) 試求 $H(\omega)=\dfrac{e^{-4\omega i}}{3+\omega i}$ 之傅立葉反轉換 $h(x)$。 (5%)
   (5) 試將微分方程 $y'(x)+5y(x)=\delta(x)$ 做傅立葉轉換並求出 $Y(\omega)=?$ (5%)
   (6) 試問 $y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=?$ (5%)

6. 試求函數 $\dfrac{2\sin 2\omega}{\omega(i\omega+1)}$ 之傅立葉反轉換。(10%)

傅立葉級數展開

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx\,,\;\; a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx\,,\;\; b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傅立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(x)\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

傅立葉積分

$$f(x) = \int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

其中 $A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx\,,\;\; B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

傅立葉複數形式級數展開

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}$， 其中 $\omega_n = \frac{2n\pi}{T}$，$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$

傅立葉轉換： $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傅立葉反轉換： $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傅立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(\omega)\right|^2 d\omega$

Convolution : $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)] = i^n \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$ 其中 $a < x_0 < b$

尤拉公式： $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$，$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)] = e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)] = F(\omega - \omega_0)$

參考解答:

1. (1) 試問當 α 為何，能使 $\{1, x, 1+\alpha x^2\}$ 在區間 $[-1, 1]$ 彼此相互正交。 (5%)
(2) 試將上述函數集合單位化。 (5%)

(1) $\int_{-1}^{1} 1\cdot(1+\alpha x^2)\,dx = 0 \quad \Rightarrow (x+\frac{1}{3}\alpha x^3)\Big|_{-1}^{1} = 0 \quad \Rightarrow \alpha = -3$

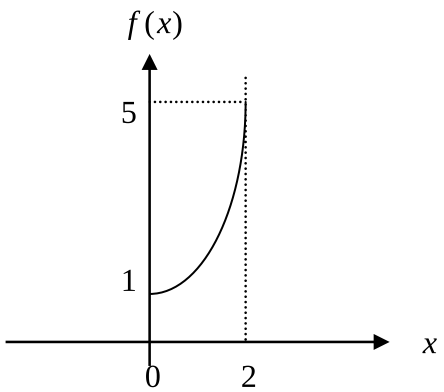
(2) $\phi_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dx}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

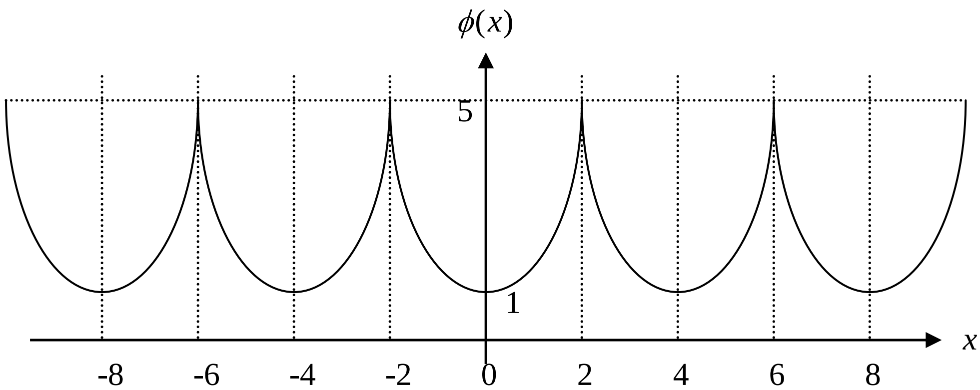
$$\phi_2(x) = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x\cdot x\,dx}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$$

$$\phi_3(x) = \frac{1-3x^2}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (1-3x^2)\cdot(1-3x^2)\,dx}} = \sqrt{\frac{5}{8}}\,(1-3x^2)$$

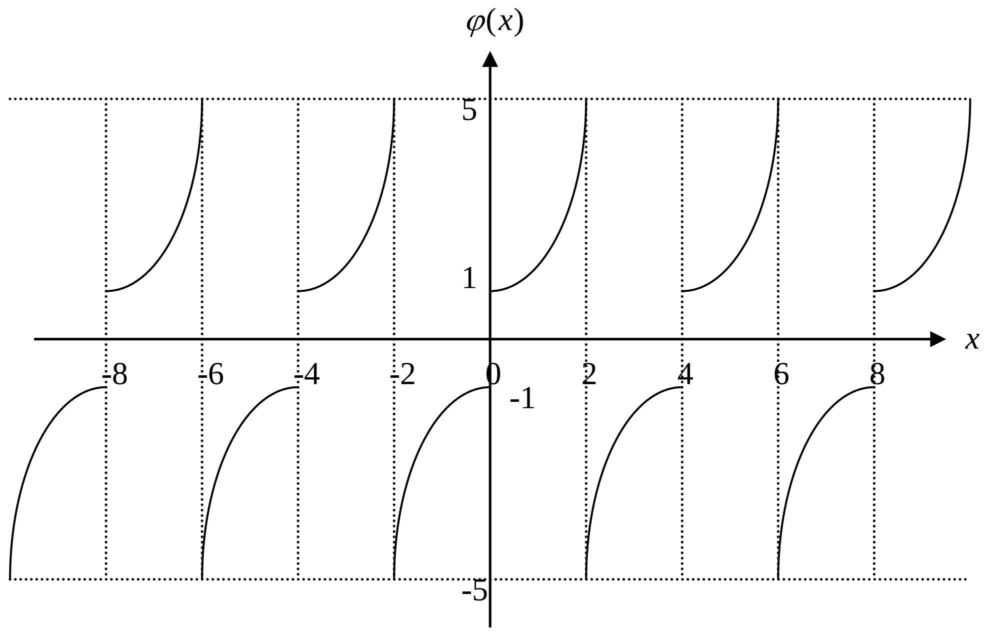
$\therefore \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\, x, \sqrt{\dfrac{5}{8}}\,(1-3x^2)\right\}$ 為單位正交函數集合

2. 已知 $f(x) = 1 + x^2,\ \ 0 \le x \le 2$，試繪出 $f(x)$ 經由半幅餘弦展開與半幅正弦展及全幅展開後相對應之圖形。(12%)

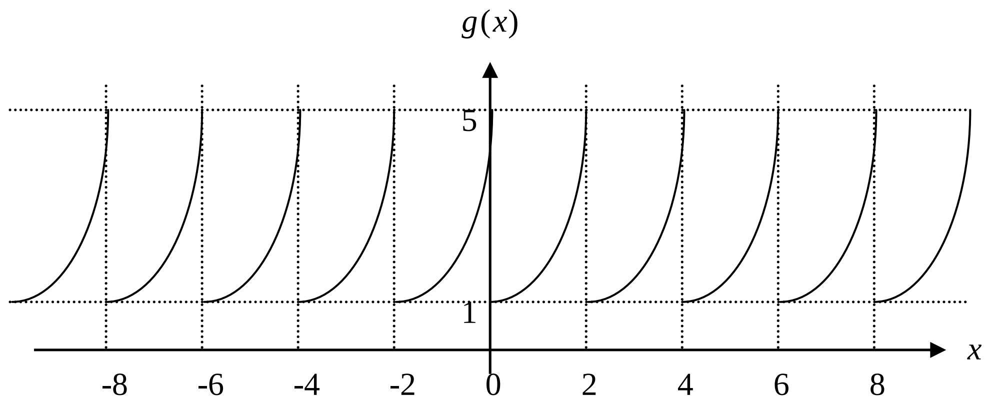




半幅餘弦展開



半幅正弦展



全幅展開

3. 給一週期函數 $f(x)=x^2$，$-1<x<1$ 且 $f(x)=f(x+2)$

(1) 此為奇函數**(odd)**或偶函數**(even)? (2%)**

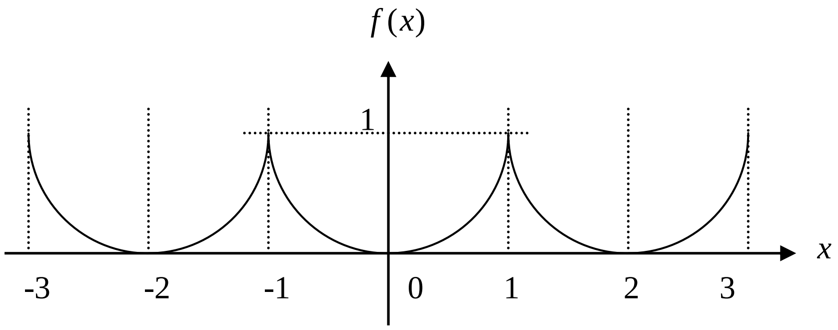
(2) 試求其傅立葉級數展開。 **(6%)**

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=?$ **(4%)**

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=?$ **(4%)**

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=?$ **(4%)**

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=?$ **(4%)**



(1) $f(x)=x^2$ 為偶函數

(2) $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}$ （已知 $T=2$，$b_n=0$）

$\Rightarrow f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2\,dx=\frac{1}{3}$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos n\pi x\,dx=\int_{-1}^{1}x^2\cos n\pi x\,dx=\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$=\left(\frac{x^2}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{2x}{n^2\pi^2}\cos n\pi x-\frac{2}{n^3\pi^3}\sin n\pi x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$$

(3) $f(1)=1^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi \quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

(4) $f(0)=0^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$

(5) 應用 Parseval 定理: $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

可得 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^4\,dx=\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$

(6) 由傅立葉級數展開可知

$$f(x)=x^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x$$

積分後可得

$$\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}x+\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin n\pi x\quad\Rightarrow\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x=\frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin n\pi x$$

應用 Parseval 定理可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^6 n^6}=\int_{-1}^{1}(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x)^2\,dx=\frac{16}{945}$

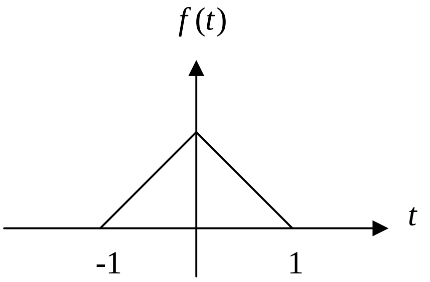
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$$

4. (1) 試求函數 $f(t)$ 的傅立葉積分表示式。(8%)

$$f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t\le -1\\ 1+t, & -1<t\le 0\\ 1-t, & 0<t\le 1\\ 0, & 1<t<\infty\end{cases}$$

(2) 試問 $\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (4%)

(1)



$\because$ 由圖可知此為偶函數

$\therefore\ f(t)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega t\,d\omega \qquad (B(\omega)=0)$

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-t)\cos\omega t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi\omega^2}(1-\cos\omega)$$

$$\therefore\ f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos\omega)\cos\omega t}{\omega^2}d\omega$$

(2) $f(0)=1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}d\omega \quad \Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2}$

5. 已知 $u(x)$ 為單位步階函數，即 $u(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$

(1) 請畫出 $g(x)=u(x+2)-u(x-2)$ 之圖形，並求其傅立葉轉換 $G(\omega)=?$ (8%)

(2) 試問 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 2\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (4%)

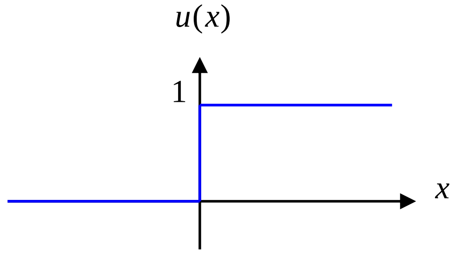
(3) 試求 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$。 (5%)

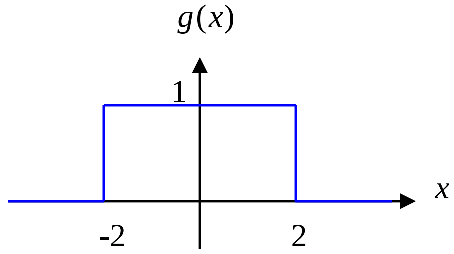
(4) 試求 $H(\omega)=\dfrac{e^{-4\omega i}}{3+\omega i}$ 之傅立葉反轉換 $h(x)$。 **(5%)**

(5) 試將微分方程 $y'(x)+5y(x)=\delta(x)$ 做傅立葉轉換並求出 $Y(\omega)=?$ **(5%)**

(6) 試問 $y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=?$ **(5%)**

(1)





$$F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx=\int_{-2}^{2}e^{-i\omega x}\,dx=2\int_{0}^{2}\cos\omega x\,dx=\frac{2\sin 2\omega}{\omega}$$

(2) 由 Parseval 定理 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\int_{-2}^{2}\,dx=4$

$$\therefore\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{2\sin 2\omega}{\omega})^2\,d\omega=4$$

$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 2\omega}{\omega^2}d\omega=2\pi$$

(3) $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax}u(x)e^{-i\omega x}dx=\int_{0}^{\infty}e^{-(a+i\omega)x}dx$

$$=-\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{a+i\omega}$$

(4) 由平移定理可知 $\mathcal{F}[f(x-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

又由(2)之結果可知 $\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{1}{3+\omega i}]=e^{-3x}u(x)$

$$\therefore\ \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{e^{-4\omega i}}{3+\omega i}]=e^{-3(x-4)}u(x-4)$$

(5) $\mathcal{F}[y'(x)+5y(x)=\mathcal{F}[\delta(x)]\quad\Rightarrow i\omega Y(\omega)+5Y(\omega)=1$

$$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{1}{5+i\omega}$$

(6) 由(2)的結果可知 $y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{1}{5+i\omega}]=e^{-5x}\cdot u(x)$

6. 試求函數 $\dfrac{2\sin 2\omega}{\omega(i\omega+1)}$ 之傅立葉反轉換。(10%)

$$\mathcal{F}^{-1}[\frac{2\sin 2\omega}{\omega(i\omega+1)}]=\mathcal{F}^{-1}[\frac{2\sin 2\omega}{\omega}\cdot\frac{1}{(i\omega+1)}]$$

又 $f(t)=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{2\sin 2\omega}{\omega}]=u(t+2)-u(t-2)$

$$g(t)=\mathcal{F}^{-1}[\frac{1}{(i\omega+1)}]=e^{-t}u(t)$$

$\therefore$ $\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{2\sin 2\omega}{\omega(i\omega+1)}]$

$$=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)\cdot G(\omega)]=f(t)*g(t)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\cdot g(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[u(\tau+2)-u(\tau-2)]\cdot[e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)]\,d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau+2)\cdot e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau-\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-2)\cdot e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$$

$$=u(t+2)\int_{-2}^{t} e^{-(t-\tau)}\,d\tau-u(t-2)\int_{2}^{t} e^{-(t-\tau)}\,d\tau$$

$$=u(t+2)\cdot e^{-t}\int_{-2}^{t} e^{\tau}\,d\tau+u(t-2)\cdot e^{-t}\int_{t}^{2} e^{\tau}\,d\tau$$

$$=u(t+2)\cdot e^{-t}\cdot(e^{t}-e^{-2})+u(t-2)\cdot e^{-t}\cdot(e^{2}-e^{t})$$

$$=u(t+2)\cdot(1-e^{-(2+t)})+u(t-2)\cdot(e^{2-t}-1)$$