國立臺灣海洋大學河海工程學系 2017 工程數學(二) 第二次大考

系級：______________　　學號：____________　　姓名：___________

1. (1) 試問當 α 為何，能使 $\{1, x, 1+\alpha x^2\}$ 在區間 $[-1,1]$ 彼此相互正交。 (5%)
   (2) 試將上述函數集合單位化。 (5%)
2. 已知 $f(x)=1+x^2,\ \ 0\le x\le 2$，試繪出 $f(x)$ 經由半幅餘弦展開與半幅正弦展及全幅展開後相對應之圖形。(12%)
3. 給一週期函數 $f(x)=x^2,\ -1<x<1$ 且 $f(x)=f(x+2)$
   (1) 此為奇函數(odd)或偶函數(even)? (2%)
   (2) 試求其傅立葉級數展開。 (6%)
   (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=?$ (4%)
   (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=?$ (4%)
   (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=?$ (4%)
   (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=?$ (4%)
4. (1) 試求函數 $f(t)$ 的傅立葉積分表示式。(8%)

$$f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t\le -1\\ 1+t, & -1<t\le 0\\ 1-t, & 0<t\le 1\\ 0, & 1<t<\infty\end{cases}$$

   (2) 試問 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (4%)
5. 已知 $u(x)$ 為單位步階函數，即 $u(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$
   (1) 請畫出 $g(x)=u(x+2)-u(x-2)$ 之圖形,並求其傅立葉轉換 $G(\omega)=?$ (8%)
   (2) 試問 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 2\omega}{\omega^2}d\omega=?$ (4%)
   (3) 試求 $f(x)=e^{-ax}u(x)$ 之傅立葉轉換 $F(\omega)$，其中 $a>0$。 (5%)
   (4) 試求 $H(\omega)=\dfrac{e^{-4\omega i}}{3+\omega i}$ 之傅立葉反轉換 $h(x)$。 (5%)
   (5) 試將微分方程 $y'(x)+5y(x)=\delta(x)$ 做傅立葉轉換並求出 $Y(\omega)=?$ (5%)
   (6) 試問 $y(x)=\mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)]=?$ (5%)
6. 試求函數 $\dfrac{2\sin 2\omega}{\omega(i\omega+1)}$ 之傅立葉反轉換。(10%)

傳立葉級數展開

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx,\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

傳立葉級數之 Parseval 恆等式： $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^2(x)\,dx=a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

傳立葉積分

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$$

其中 $A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx,\ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$

傳立葉複數形式級數展開

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{i\omega_n x}$， 其中 $\omega_n=\frac{2n\pi}{T},\ c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)e^{-i\omega_n x}\,dx$

傳立葉轉換： $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$

傳立葉反轉換： $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$

傳立葉轉換的 Parseval 恆等式： $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$

Convolution : $f*g=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$

$\mathcal{F}[f'(t)]=i\omega F(\omega)\Rightarrow\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\mathcal{F}[t^n f(t)]=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)\Rightarrow\mathcal{F}[f^{(n)}(t)]=(i\omega)^n F(\omega)$

$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0)$ 其中 $a<x_0<b$

尤拉公式: $\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$

Scaling : $\mathcal{F}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$

Time shifting: $\mathcal{F}[f(t-T)]=e^{-i\omega T}F(\omega)$

Frequency shifting: $\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t}f(t)]=F(\omega-\omega_0)$