國立臺灣海洋大學河海工程學系 2017 工程數學(二) 第一次大考參考解答

系級：_______________　　學號：_____________　　姓名：____________

1. $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$

   (1) 試求一向量 $\vec{c}$ 並且使 $\vec{c}$ 與向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 皆垂直。 (4%)

   (2) 試求通過點 $(2,-1,2)$ 且包含 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 兩向量之平面方程式。 (4%)

   (3) 給一向量 $\vec{d}=\vec{i}+2\vec{k}$ ，試問: 三向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 與 $\vec{d}$ 是否共平面? (4%)

   (須說明理由)

2. 給一勢能函數 $\varphi(x,y,z)=xy^2+yz^3$ ，試求在點 $(2,-1,1)$ 沿著方向 $\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ 的方向導數。 (10%)

3. 求曲面 $x^2y+z=3$ 與 $x\ln z-y^2=-4$ 在交點 $(-1,2,1)$ 之夾角? (10%)

4. 試求曲線 $\vec{r}(t)=\cos t\,\hat{i}+\sin t\,\hat{j}+2t\,\hat{k}$ 之單位切向量、單位法向量、單位副法向量與曲率。 (12%)

5. 對於向量場 $\vec{F}=kxyz^2\vec{i}+(x^2z^2+z\cos yz)\vec{j}+(kx^2yz+y\cos yz)\vec{k}$ ，試問此場為保守場之 k 值，並問自 $(1,\frac{\pi}{4},2)$ 至 $(2,\frac{\pi}{2},4)$ 之線積分。 (12%)

6. 某質點受一外力 $\vec{F}=x(x+y)\vec{i}+xy^2\vec{j}$ 作用，由座標原點 $(0,0)$ 出發，沿著 x 軸移動到 $(1,0)$ ，接著沿著直線路徑移動到 $(0,1)$ ，最後順著 y 軸回到原點，試問此外力對質點作了多少功?

   (1) 請用路徑積分計算。 (9%)

   (2) 請用格林定理轉換成面積分計算。 (5%)

7. 已知場 $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y-z)\vec{k}$ 及曲面 $S_1: x^2+y^2=z$ 與 $S_2: z=2$ 如圖，試問:

   (1) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (5%)

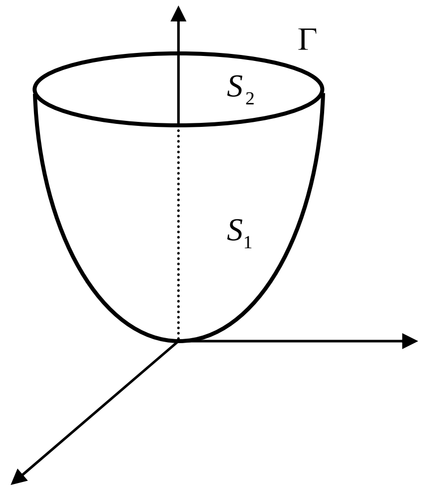
   (2) S_1 上的單位法向量 $\vec{n}=?$ (5%)

   (3) $\oiint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS=?$ (5%)

   (4) $\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ (5%)

   (5) $\iint_{S_1}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ (5%)

   (6) $\iint_{S_2}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ (5%)



Hint:

Gauss 散度定理： $\iiint \nabla\cdot\vec{F}\, dV = \oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\, dA$ **(3D)**

$$\iint \nabla\cdot\vec{F}\, dA = \oint \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds \quad \textbf{(2D)}$$

格林定理： $\int P\,dx + Q\,dy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy$

Stokes 旋度定理： $\iint (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\, dA = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$

曲率：以弧長參數 *s* 表示，單位切向量變化率的大小，即 $\kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$ 。

扭率： $\tau = \left|\frac{d(\vec{T}(s)\times\vec{N}(s))}{ds}\right|$

二倍角公式： $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$**，** $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

参考解答:

1. (1) $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & -4 & 3\end{vmatrix}=5\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$

(2) $\vec{N}=\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & -4 & 3\end{vmatrix}=5\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$

平面方程式: $\vec{N}\cdot(x-2,\ y+1,\ z-2)=0$

$$\Rightarrow 5(x-2)+2(y+1)-4(z-2)=0$$
$$\Rightarrow 5x+2y-4z=0$$

(3) $\vec{d}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & -4 & 3\end{vmatrix}=13\neq 0$

$\because$ 三向量相交出體積

$\therefore$ 非共面

2. $\nabla\varphi\big|_{(2,\,-1,\,1)}\cdot\dfrac{(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=(\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k})\cdot\dfrac{(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})}{3}=-\dfrac{11}{3}$

3. 令 $\phi=x^2y+z-3$，$\varphi=x\ln z-y^2+4$

$\nabla\phi\big|_{(-1,\,2,\,1)}=-4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\quad\Rightarrow|\nabla\phi|=\sqrt{18}$

$\nabla\varphi\big|_{(-1,\,2,\,1)}=-4\vec{j}-\vec{k}\quad\Rightarrow|\nabla\varphi|=\sqrt{17}$

$\cos\theta=\dfrac{\nabla\phi\cdot\nabla\varphi}{|\nabla\phi|\,|\nabla\varphi|}\quad\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\dfrac{-5}{\sqrt{18}\,\sqrt{17}}=1.8607\ \ \text{(rad)}=106.61^\circ$

4. $\vec{r}(t)=\cos t\,\hat{i}+\sin t\,\hat{j}+2t\,\hat{k}$

$\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)=-\sin t\,\hat{i}+\cos t\,\hat{j}+2\,\hat{k}$

單位切向量: $\vec{t}(t)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\sin t\,\hat{i}+\cos t\,\hat{j}+2\,\hat{k})$

法向量: $\vec{t}\,'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\cos t\,\hat{i}-\sin t\,\hat{j})$

單位法向量：$\vec{n}(t) = -\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j}$

單位副法向量：$\vec{t} \times \vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\sin t\,\hat{i} - 2\cos t\,\hat{j} + \hat{k})$

曲率 $\kappa(t) = \dfrac{|\vec{t}\,'(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{5}$

5. 此為保守場，故有 $\nabla \times \vec{F} = 0$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ kxyz^2 & x^2z^2 + z\cos yz & kx^2yz + y\cos yz \end{vmatrix}$$

$$= [(kx^2z + \cos yz - yz\sin yz) - (2x^2z + \cos yz - yz\sin yz]\vec{i}$$

$$+ (2kxyz - 2kxyz)\,\vec{j} + (2xz^2 + kxz^2)\,\vec{k} = 0$$

$$\Rightarrow k = 2$$

且 $\nabla\phi = \vec{F}$ ，即

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xyz^2 \qquad\qquad \phi = x^2yz^2 + f(y,z)$$

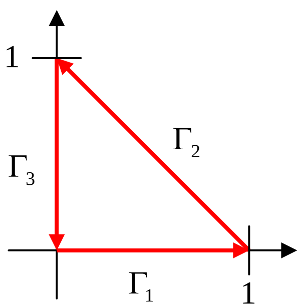
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2z^2 + z\cos yz \quad \Rightarrow \quad \phi = x^2yz^2 + \sin yz + g(x,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 2x^2yz + y\cos yz \qquad \phi = x^2yz^2 + \sin yz + h(x,y)$$

$$\therefore \quad \phi(x,y,z) = x^2yz^2 + \sin yz + c$$

場 $\vec{F}$ 自 $(1, \frac{\pi}{4}, 2)$ 至 $(2, \frac{\pi}{2}, 4)$ 之線積分為 $\phi(2, \frac{\pi}{2}, 4) - \phi(1, \frac{\pi}{4}, 2) = 31\pi - 1$

6. (1) $W = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$



$$\int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int x(x+y)dx + xy^2 dy$$

$$= \int_0^1 (1-y)(-dy) + (1-y)y^2 dy$$

$$= (-y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4)\Big|_0^1 = -\frac{5}{12}$$

$$\int_{\Gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^0 0\, dy = 0$$

$$W = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\frac{1}{12}$$

(2) $W = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C Pdx + Qdy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dxdy$

$$= \iint (\frac{\partial (xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial (x^2+xy)}{\partial y})\, dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-y} (y^2 - x)\, dxdy$$

$$= -\frac{1}{12}$$

7. (1) $\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y & 2x-z & y-z \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k}$ $\Rightarrow$ 此為非保守場

(2) 令 $\phi = x^2 + y^2 - z$

$$\vec{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

(3) 由 Gauss 散度定理: $\oiint \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint \nabla\cdot\vec{F}\, dV = \iiint 0\, dV = 0$

(4) 令 $x = \sqrt{2}\cos\theta \quad \Rightarrow dx = -\sqrt{2}\sin\theta\, d\theta$

$y = \sqrt{2}\sin\theta \quad \Rightarrow dy = \sqrt{2}\cos\theta\, d\theta$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma (x+y)dx + (2x-z)dy$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\cos\theta\sin\theta - 2\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} [-(1-\cos 2\theta) + 2(1+\cos 2\theta)] d\theta$$

$$= 2\pi$$

(5) 由 Stokes 旋度定理: $\iint_{S_1} (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\, dA = -\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -2\pi$

(6) 由 Stokes 旋度定理: $\iint_{S_2} (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\, dA = \oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\pi$