國立臺灣海洋大學河海工程學系 2017 工程數學(二) 第一次大考

系級：____________ 學號：____________ 姓名：____________

1. $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$

   (1) 試求一向量 $\vec{c}$ 並且使 $\vec{c}$ 與向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 皆垂直。 (4%)

   (2) 試求通過點 $(2,-1,2)$ 且包含 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 兩向量之平面方程式。 (4%)

   (3) 給一向量 $\vec{d}=\vec{i}+2\vec{k}$ ，試問: 三向量 $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 與 $\vec{d}$ 是否共平面? (4%)

   (須說明理由)

2. 給一勢能函數 $\varphi(x,y,z)=xy^2+yz^3$ ，試求在點 $(2,-1,1)$ 沿著方向 $\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ 的方向導數。 (10%)

3. 求曲面 $x^2y+z=3$ 與 $x\ln z-y^2=-4$ 在交點 $(-1,2,1)$ 之夾角? (10%)

4. 試求曲線 $\vec{r}(t)=\cos t\,\hat{i}+\sin t\,\hat{j}+2t\,\hat{k}$ 之單位切向量、單位法向量、單位副法向量與曲率。 (12%)

5. 對於向量場 $\vec{F}=kxyz^2\vec{i}+(x^2z^2+z\cos yz)\vec{j}+(kx^2yz+y\cos yz)\vec{k}$ ，試問此場為保守場之 k 值，並問自 $(1,\frac{\pi}{4},2)$ 至 $(2,\frac{\pi}{2},4)$ 之線積分。 (12%)

6. 某質點受一外力 $\vec{F}=x(x+y)\vec{i}+xy^2\vec{j}$ 作用，由座標原點 $(0,0)$ 出發，沿著 x 軸移動到 $(1,0)$，接著沿著直線路徑移動到 $(0,1)$，最後順著 y 軸回到原點，試問此外力對質點作了多少功?

   (1) 請用路徑積分計算。 (9%)

   (2) 請用格林定理轉換成面積分計算。 (5%)

7. 已知場 $\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y-z)\vec{k}$ 及曲面 $S_1: x^2+y^2=z$ 與 $S_2: z=2$ 如圖，試問:

   (1) $\vec{F}$ 是否為保守場? 請說明之。 (5%)

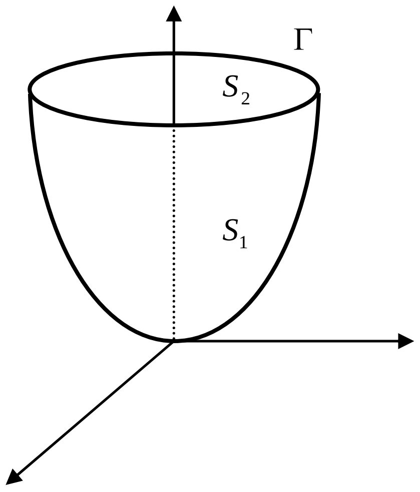
   (2) S_1 上的單位法向量 $\vec{n}=?$ (5%)

   (3) $\oiint(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS=?$ (5%)

   (4) $\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=?$ (5%)

   (5) $\iint_{S_1}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ (5%)

   (6) $\iint_{S_2}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA=?$ (5%)



Hint:

Gauss 散度定理： $\iiint \nabla \cdot \vec{F}\ dV = \oiint \vec{F} \cdot \vec{n}\ dA$ **(3D)**

$\iint \nabla \cdot \vec{F}\ dA = \oint \vec{F} \cdot \vec{n}\ ds$ **(2D)**

格林定理： $\int P\,dx + Q\,dy = \iint (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$

Stokes 旋度定理： $\iint (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\ dA = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$

曲率：以弧長參數 *s* 表示，單位切向量變化率的大小，即 $\kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$ 。

扭率： $\tau = \left|\frac{d(\vec{T}(s) \times \vec{N}(s))}{ds}\right|$

二倍角公式： $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$**，** $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$