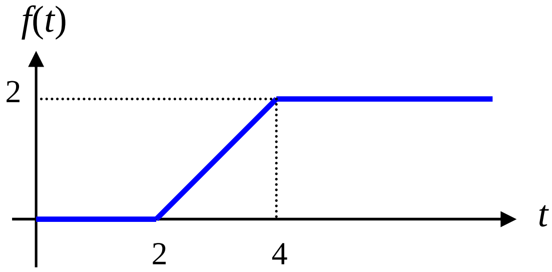
國立臺灣海洋大學河海工程學系 2017 工程數學(二) 期末考

系級：______________ 學號：____________ 姓名：___________

1. (1) 試以 unit step function 之組合來表示下圖 $f(t)$ 之函數。 (5%)



(2) 試求 $f(t)$ 之拉普拉斯轉換，即 $F(s)=?$ (5%)

(Hint: unit step function: $u(t-a)=\begin{cases}1, & t>a\\ 0, & t<a\end{cases}$ 其中 a 為常數)

2. 試求下列 $f(t)$ 的拉普拉斯轉換為何? (15%)

(1) $f(t)=5$ (2) $f(t)=t^2e^{-2t}$ (3) $f(t)=\sin(5t+\frac{\pi}{4})$

3. 試求下列 $F(s)$ 的拉普拉斯逆轉換為何? (15%)

(1) $F(s)=5$ (2) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+s^4}$ (3) $F(s)=\dfrac{s+4}{s^2+4s+20}$

4. 已知 $f(t)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ -1, & 1<x<2\end{cases}$ 又 $f(t)=f(t+2)$，試問此函數經由拉普拉斯轉換後結果為何? (10%)

5. 若 $t\in[0,\infty)$，試問 $t^2*t^2*t^2=?$ (* 表示摺積運算元) (10%)

6. 試以拉普拉斯轉換法求解下述方程式。 (30%)

(1) $y'(t)=1-\sin t-\int_0^t y(\tau)d\tau$ 且 $y(0)=0$

(2) $y(t)=1-\sin t+\int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$

(3) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=\delta(t-2)$ 且 $y'(0)=y(0)=0$

7. 試求解下述聯立微分方程組 (10%)

$$\begin{cases}x''(t)-4x'(t)+8y'(t)+4y(t)=4\\ 2y'(t)-2x'(t)+y(t)=0\end{cases}$$ 且 $x(0)=x'(0)=y(0)=1$

拉普拉斯轉換： $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$

第一平移定理: $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

第二平移定理: $\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = e^{-as} F(s)$

尺度變換: $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$

微分函數的拉普拉斯轉換: $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

積分函數的拉普拉斯轉換: $\mathcal{L}[\int_0^t f(x)\, dx] = \frac{F(s)}{s}$

$$\mathcal{L}[\int_0^t \int_0^t f(x)\, dx\, dx] = \frac{F(s)}{s^2}$$

拉普拉斯轉換的微分: $\mathcal{L}[tf(t)] = (-1) \frac{d}{ds} F(s)$

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

拉普拉斯轉換的積分: $\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^\infty f(\tau)\, d\tau$

$$\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t^2}] = \int_s^\infty \int_\gamma^\infty f(\tau)\, d\tau\, d\gamma$$

摺積: $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau$